Ein elektrodynamisches Märchen

Horst Hübel, Osor, Mai 2006

Es geht in diesem Bericht um den einstmals berühmten Gelehrten Minbad Nearanite. Es wird berichtet über seine gewaltigen Anstrengungen und genialen Einfälle, darüber, wie er eine Theorie der Elektrizität und des Magnetismus fand, die weitgehend in Konkurrenz steht zu der heute üblichen Formulierung mit elektrischen und magnetischen Feldern, aber genauso richtig wie diese alle Beobachtungen beschreibt. Der Leser kann teilhaben an manchmal seltsamen Wegen, mit denen Minbad zu neuen Erkenntnissen gelangte, die vielfach den von der Schulphysik gelehrten Methoden der Erkenntnis zuwiderlaufen, die aber dennoch sehr erfolgreich waren. Der Leser wird eingespannt in die Überlegungen und Begründungen, mit denen verschiedene Formulierungen eines Teilgebiets der Wissenschaft gegeneinander abgewogen wurden, und wird aufgefordert, über "Realität" in der Wissenschaft nachzudenken.

Es war einmal ein begabter junger Mann mit dem unaussprechlichen Namen Minbad Ibn sounddso. Viel später, als er auch in Europa bekannt geworden war, bezeichnete man ihn mit dem anglisierten Namen Minbad Nearanite, so wie viele Jahre früher aus dem in Buchara geborenen Ibn Sina der persische Arzt und Philosoph mit dem latinisierten Namen Avicenna oder aus dem arabischen Universalwissenschaftler Ibn Rushd aus Cordoba Averroes geworden war, dessen philosophische, juristische, theologische, medizinische und physikalische Werke auch viele christliche Gelehrte beeinflusst hatten. Minbad lebte in einem heute nicht mehr existierenden Land im Nahen Osten und hatte an der Universität von Bagdad alles Wissen seiner Zeit über Mathematik und Naturwissenschaften begierig aufgesogen. Besonders die Mathematik hatte ihn zu denken gelehrt. Auch Physik wurde dort auf hohem Niveau betrieben, natürlich entsprechend seiner Zeit. Bekanntlich hatten ja schon die alten Babylonier Batterien benutzt um Gegenstände galvanisch zu versilbern. So waren Minbad unter anderem die über mehr als tausend Jahre lang weiter gegebenen Kenntnisse über elektrische Stromkreise selbstverständlich und er kannte sich aus mit Begriffen, die wir heute Strom und Spannung nennen.

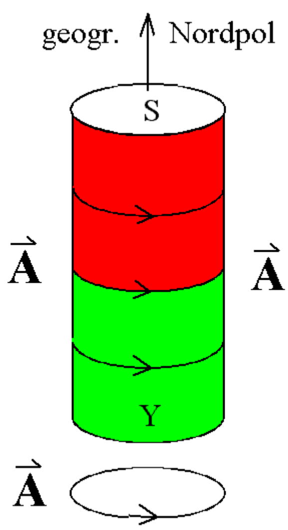

***Abb. 1:** Vektorfeld **A** um einen Stabmagneten*

Am Ende des Altertums waren Magnete in das Interesse der Gelehrten und Seefahrer gerückt. Auch Minbad experimentierte mit ihnen, beschrieb und deutete ihre Wirkungen. Bei einem Stabmagneten gab es offenbar zwei unterschiedliche Pole. In einem genialen Einfall behauptete er, dass durch den Magnetismus ein "Feld" erzeugt werde, das den Stab ringförmig umgebe, an seiner Oberfläche, aber auch in seinem Inneren und außerhalb. Er gab ihm einen Namen - Vektorfeld **A** - und eine Richtung. In seiner Kultur war er es gewohnt, die Welt bezüglich der Ostrichtung einzuteilen. Es war üblich, die links von der Ostrichtung liegenden Länder as-shams ("zur Linken") zu nennen und die rechts von der Ostrichtung liegenden Länder al-yamini ("zur Rechten"). So wird heute noch Syrien im Nahen Osten as-shams genannt und den Namen Jemen verwenden sogar wir noch für ein bestimmtes Land. In Richtung des Vektorfelds **A** schauend nannte Minbad den einen Pol S, den anderen Y. (S hat offenbar nichts mit „Süden“ zu tun.) Und weil die Feldlinien von **A** geschlossen waren, gab es überall längs ihres Verlaufes eine eindeutige "Ostrichtung" und eindeutige Pole S und Y.

Und Minbad bemerkte, dass ein frei aufgehängter Stabmagnet sich so drehte, dass das mit S bezeichnete Ende nach Norden zeigte (Abb. 1).

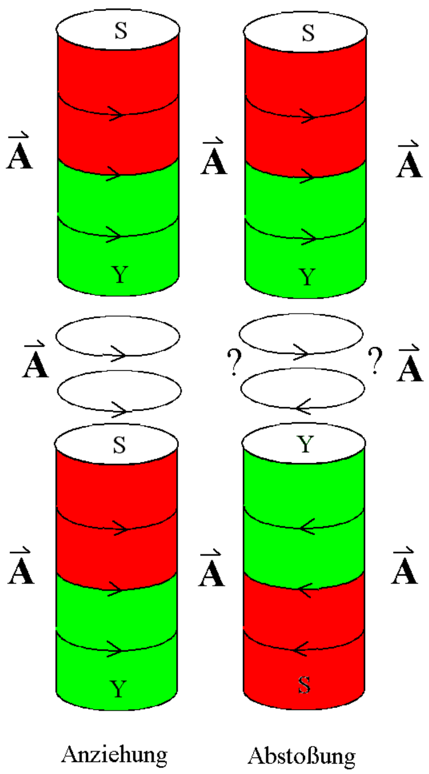

***Abb. 2:** Kräfte zwischen Stabmagneten*

Mit der Erfindung eines solchen Vektorfelds **A** konnte Minbad eine ganze Menge erklären: Stellte man zwei gleich orientierte Stabmagneten gegenüber, so dass also der Y-Pol des einen Magneten und der S-Pol des anderen Magneten sich nahe waren, zogen sich die beiden Magneten an: Dann waren die **A**-Feldlinien beider Magnete gleich orientiert, ein Zustand, der offenbar eine Vereinigung der beiden Magnete zu einem einzigen begünstigte. Wurden aber die Magnete so angeordnet, dass sich zwei S-Pole gegenüberstanden, oder zwei Y-Pole, dann stießen sich die beiden Magneten ab, weil, wie Minbad erklärte, die jeweiligen **A**-Feldlinien einander entgegengesetzt verliefen, ein offenbar sehr ungünstiger Zustand. Ja, er beobachtete in vielen Fällen sogar, dass sich einer der Magneten umdrehte, damit sich die **A**-Feldlinien von beiden Magneten gleich ausrichten konnten.

Auch die Anziehung von Eisen durch einen Stabmagneten war einfach erklärbar: Durch einen Vorgang, der später magnetische Polarisation oder, häufiger, Magnetisierung genannt wurde, entstanden auch im Eisenstück **A**-Feldli-nien, die natürlich zu denen des Stabmagneten ungefähr gleichgerichtet sein sollten. Sie machten auch das Eisenstück zu einem gleich orientierten Magneten. So ließ sich die Anziehung von Eisen durch einen beliebig orientierten Magneten erklären.

Minbad war mathematisch auf der Höhe seiner Zeit. Er kannte das Teilgebiet, das wir heute Vektoranalysis nennen, und so war es naheliegend für ihn,Vektoroperationen auf das Feld **A** anzuwenden. Seine Vermutung war, dass **A** immer geschlossene Feldlinien hat, heute würden wir sagen, dass es ein Wirbelfeld ist mit rot **A** =/ 0. Es dürfte dann keine Quellen haben, in heutiger Sprechweise also div **A** = 0. Es wäre dann also immer ein **reines** Wirbelfeld.

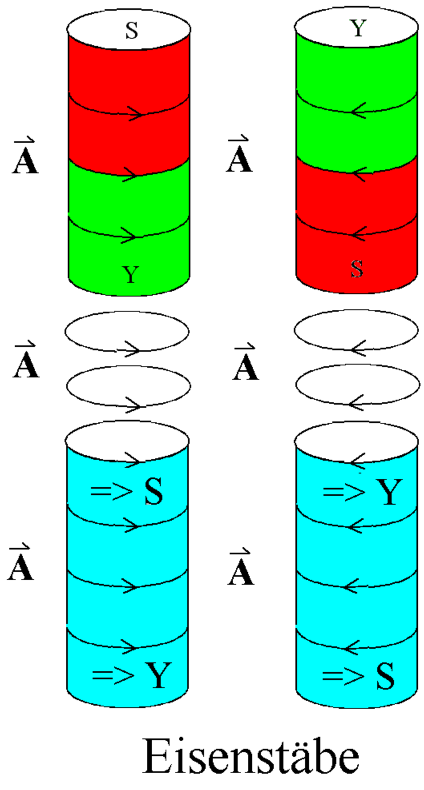

***Abb. 3:** Kraft zwischen Permanentmagnet und Eisenstab*

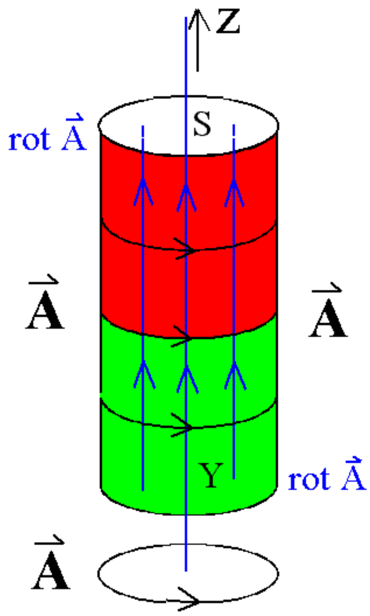

*Abb. 4: Zusammenhang zwischen **rot A** und A beim Stabmagneten*

Und es gelang Minbad, ein einfaches Theorem nachzuweisen, nämlich dass **A** und seine Wirbel, also **rot A**, immer dann senkrecht aufeinander stehen würden, wenn **A** oder rot **A** in einem beliebigen orthogonalen Koordinatensystem eindeutig längs einer Koordinatenrichtung orientiert sei. Das war bei dem sehr langen und dünnen Stabmagneten in guter Näherung der Fall. Dort war **A** in Zylinderkoordinaten eindeutig längs der azimutalen Richtung orientiert. **rot A** musste also senkrecht dazu stehen; es kam nur die z-Richtung oder die radiale Richtung für **rot A** in Frage. Radiale Richtung hätte Quellen von **rot A** verlangt, doch wusste jeder Vektoranalytiker damals, dass div (**rot A**) = 0 in allen Fällen. Die Wirbelstärke **rot A** von **A** musste also in z-Richtung längs des Magneten gerichtet sein und zwar von Y nach S im Inneren des Magneten.

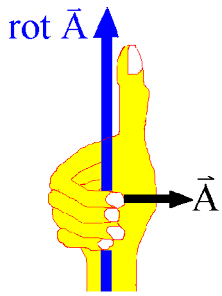

Abb. 5:** Orientierung von A und **rot A

Für die relative Orientierung von **A** und **rot A** fand Minbad eine einfache Regel, die Rechte-Hand-Regel (siehe Abb. 5).

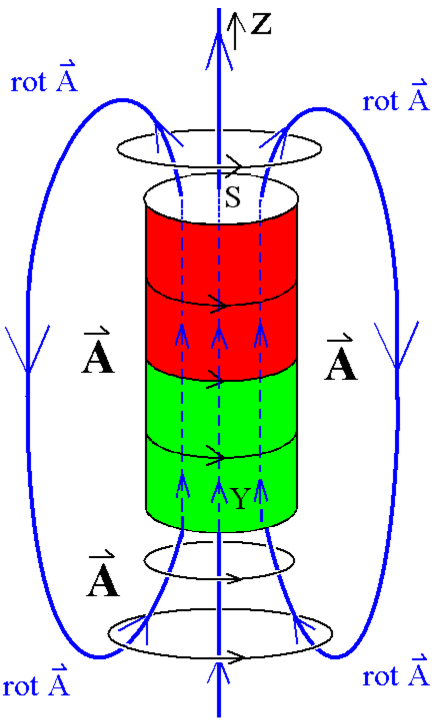

*Abb. 6: Beim Stabmagneten bildet A konzentrische Kreise um die Stabachse. **rot A** greift in den Raum hinaus.*

Aus den Versuchen mit mehreren Stabmagneten oder der Anziehung auf ein Eisenstück musste geschlossen werden - Minbad fasste ja **A** als die lokale Ursache für die Kraftwirkungen auf - , dass das **A**-Feld auch außerhalb des Stabmagneten mit ringförmig geschlossenen Feldlinien vorhanden sein musste. Weil rot **A** keine Quellen haben darf (div **rot A** = 0), muss dann auch rot **A** geschlossene Feldlinien aufweisen. Sie müssen dann notgedrungen außerhalb des Magneten vom S- zum Y-Pol weiterlaufen, wenn sie im Inneren schon vom Y- zum S-Pol laufen.

In einfachen Fällen konnte man mit dieser Regel, für Stellen wo sie exakt gültig war und für Stellen, wo sie nur ungefähr gültig war, den Feldverlauf von **A** und **rot A** einfach recht gut plausibel machen.

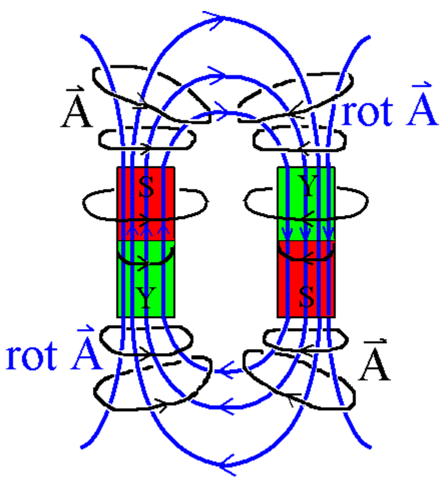

***Abb. 7:** A und **rot A** bei entgegengesetzt orientierten Stabmagneten*

Es war zu vermuten, dass auch den Feldlinien von **rot A** eine gewisse physikalische Bedeutung zukommen musste.

Manchmal konnte Nearanite die Feldlinien von **rot A** sogar sichtbar machen und dann rückwärts - wenigstens näherungsweise - auf den Verlauf der Feldlinien von **A** schließen. Das gelang mit Eisenfeilspänen, die sich längs der Feldlinien von **rot A** aneinander hängten. Ungefähr senkrecht dazu, die Feldlinien von **rot A** umschlingend, konnten dann die geschlossenen Feldlinien von **A** erschlossen werden. Die Zeichnungen mit wenigen Feldlinien deuten das an.

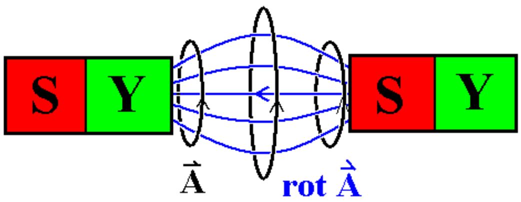

Abb. 9: *Feldlinien zwischen sich anziehenden Magneten*

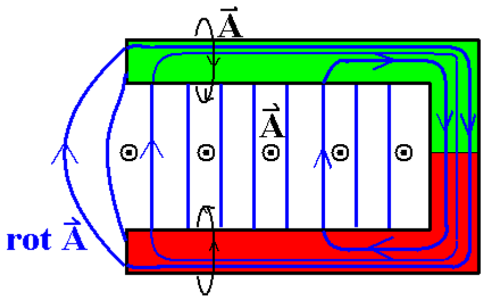

Abb. 8: ***A*** *und* ***rot A*** *bei einem Hufeisenmagneten. Es gibt nur geschlossene Feldlinien.*

Nearanite hatte auch nicht sichtbare Feldlinien im Inneren der Schenkel des Hufeisenmagneten ergänzt, weil ja **A** und **rot A** geschlossene Feldlinien haben mussten. Das war für viele seiner Zeitgenossen sehr überraschend.

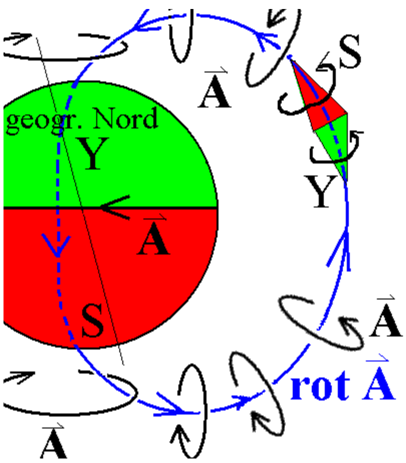

Abb. 10: *Das Erdmagnetfeld. Der geographische Nordpol liegt in der Nähe des Y-Pols.*

Minbad war hochzufrieden mit seiner Erfindung des **A**-Felds und erwarb sich durch sie viel Ansehen unter den Gelehrten seines Landes. Durch das **A**-Feld konnten Magnete erstmals physikalisch beschrieben werden. Und wenn man annahm, dass auch die Erde selbst ein riesiger Magnet sei mit ringförmig geschlossenen **A**- und **rot A**-Feldlinien, dann war die Ausrichtung einer Kompassnadel nach Norden hin nicht Teufelszeug, wie viele bis dahin glaubten, sondern eine einfache physikalische Wirkung. Die **A**-Felder von Erdmagnet und Kompassmagnet haben nämlich das Bestreben, sich - geführt durch die ringfömig geschlossenen Feldlinien von **rot A** - gleich zu orientieren. Außerhalb des christlichen Europas hat diese Erkenntnis damals zu einem gewaltigen Aufschwung der Seefahrt und des Handels geführt. Dagegen fürchteten sich christliche Seefahrer, denen dieses Verständnis noch fehlte, die neue Erfindung anzuwenden.

*

Ein Punkt hatte Minbad aber immer gewurmt, nämlich, dass er bislang das **A**-Feld nicht **messen** konnte. Ein neuer Impuls aus einer ganz anderen Richtung brachte ihn hier weiter. Begünstigt durch die hoch entwickelte Handwerkskunst seines Landes hatte Minbad ein mechanisches Gerät herstellen lassen, mit dem elektrische Spannungen gemessen werden konnten. Es beruhte auf gegeneinander drehbare Metallplatten, die sich nicht berührten, von denen eine mit einem Zeiger verbunden war. Verband man die zwei Pole des Geräts mit einer sehr starken Batterie, dann drehten sich die Platten gegeneinander, und wenn man noch eine Rückstellfeder einbaute, war der Ausschlag ein Maß für die Spannung der Batterie. Heute würden wir sagen, Minbad hatte einen elektrostatischen Spannungsmesser bauen lassen; damals wurde das Gerät "Minbad-Waage", etwas später in Europa "Nearanite-Waage", genannt. Diese

Erfindung war die Voraussetzung für die eigentlichen Untersuchungen.

Nearanite experimentierte mit zwei großen parallel zueinander aufgestellten Metallplatten, zwischen denen keine elektrisch leitende Verbindung bestehen durfte. Die Minbad-Waage wurde zunächst mit den beiden Platten verbunden. Es war nicht besonders aufregend, dass die Minbad-Waage ausschlug, wenn eine hohe Spannung an die Metallplatten angelegt wurde. Mit einem bahnbrechenden Trick gelang es aber Minbad nachzuweisen, dass zwei beliebige Punkte zwischen den geladenen Platten zu einem Ausschlag der Minbad-Waage führten, zu einem um so größeren, je weiter die beiden Punkte im Raum zwischen den Platten voneinander entfernt waren, und dass der Ausschlag bei festem Abstand der Punkte auch umso größer war, je größer die angelegte Spannung war. Der Trick wurde später in Europa "Flammensonde" genannt. Minbad fand heraus, dass für ein bestimmtes Plattenpaar bei einer bestimmten angelegten Spannung der Ausschlag dividiert durch den Abstand der Messpunkte konstant war, ganz gleich wie groß der Abstand war und zwischen welchen Punkten der Ausschlag gemessen wurde.

Wieder lag es an der unzähmbaren Kreativität des auch theoretisch genialen Minbad, dass er zur Beschreibung der Situation den Begriff des "Potenzialgebirges" erfand, $\Phi(\mathbf{r})$ genannt, dessen Steigung an jeder Stelle im Zwischenraum des Plattenpaares konstant sein sollte. Warum ihm der Begriff so wichtig war? Brachte er ein kleines Kügelchen aus dem Mark der Sago-Palme, das an einem dünnen Seidenfaden aufgehängt war, nach einer einmaligen Berührung einer Platte in den Zwischenraum, dann schlug es zur anderen Platte hin aus. Es fiel Minbad nicht schwer, dies als die Wirkung einer elektrischen Kraft zu deuten. Aber das Bemerkenswerte war, dass es überall gleich weit ausschlug, solange nur $\mathbf{grad}\ \Phi(\mathbf{r})$ konstant war, und dass es umso weiter ausschlug, je größer $\mathbf{grad}\ \Phi(\mathbf{r})$ dem Betrag nach war. In heutiger Sprechweise fand Minbad heraus, dass die Kraft auf eine Ladung (geladenes Markkügelchen) proportional zu $\mathbf{grad}\ \Phi(\mathbf{r})$ ist! Die Kraft als Folge eines Potenzialgebirges, genauer, als Folge seiner Hangsteigung! Irgendetwas bislang Unbekanntes musste sich da im Raum zwischen den Metallplatten ausbreiten. Es war offenbar nicht wägbar, nicht fühlbar, nicht sichtbar, aber doch real vorhanden. Ein neuer Gegenstand, dem Nearanite (in unsere Sprache übersetzt) den Namen "Feld" gab, genauer "Potenzialfeld". Später wurde dann herausgefunden, dass bei der Kraftmessung der Proportionalitätsfaktor gerade die elektrische Ladung q des Kügelchens ist. Bei einer positiven Ladung ist die Kraft $\mathbf{F}$ hangabwärts gerichtet, also entgegengesetzt zu $\mathbf{grad}\ \Phi(\mathbf{r})$, und es gilt $\mathbf{F} = -\, q \cdot \mathbf{grad}\ \Phi(\mathbf{r})$. In der Folge dachten sich die Gelehrten seiner Zeit die raffiniertesten Potenzialgebirge aus, sagten Kraftrichtung und Größe vorher, und in einfachen Fällen gelang es ihnen sogar, die Vorhersagen experimentell zu bestätigen.

Was waren die Ursachen dieses Potenzialfelds? Es trat immer auf, wenn im Raum Ladungen vorhanden waren. Ladungen als Ursache eines Potenzialfelds und einer Kraft? Etwas Ähnliches kannte man doch in seinem Land schon von der Astronomie her. Dort waren Massen, vor allem von Himmelskörpern, aber - schwer nachzuweisen - auch von Bleikugeln und Ähnlichem, die Ursache eines Gravitationspotenzials. Umgekehrt hatte in Europa viel später der Magdeburger Otto von Guericke spekuliert, dass ähnlich wie von elektrischen Ladungen ein elektrisches Potenzial ausgeht, so gehe auch von den Massen der Himmelskörper ein Gravitationspotenzial aus, das die gegenseitige Anziehung der Himmelskörper bewirke. Er hatte die dort und damals noch unbekannte Gravitationsanziehung durch den leeren Raum hinweg durch elektrostatische Modellversuche mit geriebenen Schwefelkugeln plausibel zu machen versucht, die über einige Dezimeter Entfernung hinweg Papierschnitzel anziehen konnten. Nearanite kannte hingegen sogar die mathematische Gleichung, die beschrieb, wie aus einer Massendichte ρ_M ein Gravitationspotenzial entstand: $\Delta\Phi_G = k.\rho_M$ mit einer Konstanten k. Was lag näher als anzunehmen, dass ähnlich auch für das elektrische Potenzial gelten würde

$\Delta\Phi = k'.\rho$, wobei hier ρ die elektrische Ladungsdichte war? Die Gelehrten seiner Zeit konnten die Gleichung lösen und damit Kräfte vorhersagen, in einfachen Fällen sogar im Experiment bestätigen. ($\Delta\Phi$ ist in kartesische Koordinaten die Abkürzung für $\Delta\Phi = \partial^2\Phi/\partial x^2 + \partial^2\Phi/\partial y^2 + \partial^2\Phi/\partial z^2$ mit jeweils zweiten partiellen Ableitungen.)

Damit kannte die Wissenschaft also drei Ursachen von Kraftwirkungen: ein Potenzialgebirge $\Phi_G(\mathbf{r})$ bzw. ein Potenzialfeld, das von Massen ausging und auf Massen zu wirken schien, ein Potenzialgebirge $\Phi(\mathbf{r})$ bzw. ein Potenzialfeld, das von elektrischen Ladungen ausging und auf elektrische Ladungen zu wirken schien, und ein Vektorfeld **A**, das von Magneten ausging und auf Magnete oder Eisenstücke zu wirken schien. Als Vektoranalytiker spekulierte Minbad natürlich sofort, ob sich aus $\Phi(\mathbf{r})$ ebenfalls ein Vektorfeld ableiten ließe. Außer dem schon bekannten **grad** $\Phi(\mathbf{r})$ fand er nichts Bemerkenswertes. Aber **grad** $\Phi(\mathbf{r})$ war von völlig anderer Art als **A** oder **rot A**: es hatte keine geschlossenen Feldlinien; seine Feldlinien begannen an der einen Sorte von Ladungen (wir nennen sie heute positive) und enden an den Ladungen der anderen Sorte (wir nennen sie heute negative). So teilte Minbad die physikalische Welt ein in Felder "mit Quellen und Senken", wie das später hieß, und Felder "ohne Quellen und Senken", also Wirbelfelder.

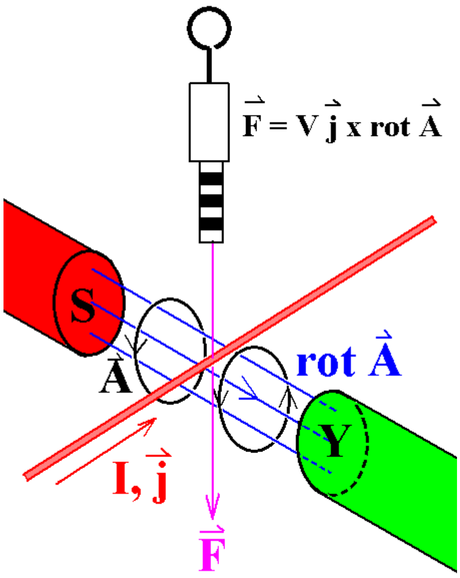

Abb. 11: *Kraft **F** auf einen vom Strom I durchflossenen Leiter im Magnetfeld*

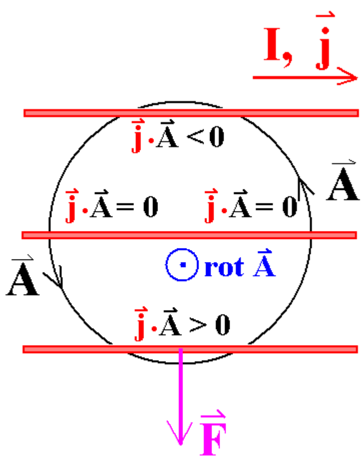

Abb. 12: *Kraft **F** auf einen vom Strom I durchflossenen Leiter im Magnetfeld*

Im Traum kam Minbad die Idee, dass er vielleicht auch **A** durch Kräfte messen könnte. Voraus ging ein Experiment, bei dem er einen Strom längs eines langgestreckten Leiters oder viele Ströme in den benachbarten Windungen einer Spule aus mit Seide ummantelten Kupferdrähten durch ein Vektorfeld **A** zwischen zwei Magneten fließen ließ. Floss der Strom senkrecht zu **A**, genauer: parallel zur **rot A**, durch das Feld, so zeigte sich keinerlei Wirkung.

In allen anderen Fällen aber wurde der Leiter in eine bestimmte Richtung abgelenkt, am stärksten, wenn der Strom möglichst parallel zu **A** verlief bzw. senkrecht zu **rot A**. In diesem Fall gab es eine große Kraft senkrecht zu **rot A** und senkrecht zum Strom. Zuerst musste erklärt werden, warum überhaupt eine Kraftwirkung vom Vektorfeld **A** auf den stromdurchflossenen Leiter zustande kam. Gab es auch hier ein Potenzialgebirge, dessen Hangneigung (Gradient) die Richtung der Kraft und ihre Größe bestimmte? Wenn ja, musste das Potenzialgebirge von der Stromstärke I und vom Vektorfeld **A** abhängen. Minbad versuchte es mit dem Skalarprodukt **j**.**A** und nannte es "Strompotenzial" in Anlehnung an das elektrische Potenzial, wobei **j** die Stromdichte ist. Ihre Richtung stimmt in jedem Punkt mit der Richtung des Stroms dort überein, ihr Betrag ist Stromstärke I dividiert durch die Querschnittsfläche A des Leiters. Das passte gut zur Beobachtung, dass keine Kraftwirkung beobachtbar war, wenn I und **A** überall senkrecht standen (**j**.**A** = 0). Dann verschwindet das Skalarprodukt genauso wie die Kraft. Aber der Name "Strompotenzial" bereitete ihm Unbehagen, weil es sich nicht um ein richtiges Potenzial handelte, sondern von der eventuell veränderlichen Stromdichte **j** abhing.

In der Zeichnung (Abb. 12) ließ er seine Schüler immer auf die Wirbel von **A** schauen, dem Vektor **rot A** entgegen. An drei Positionen ist der eine stromdurchflossener Leiter eingezeichnet. In der oberen Position ist das Skalarprodukt **j**.**A** negativ, in der Mitte verschwindet es, und unten ist es positiv. Hier liegt ganz klar ein von oben nach unten ansteigendes Potenzialgebirge vor, und wohin ist die Kraft gerichtet? Hangaufwärts sagt das Experiment diesmal, in der Zeichnung also nach unten! Kehrt man die Stromrichtung um, steigt das Potenzialgebirge (in der Zeichnung) von unten nach oben an. Die hangaufwärts gerichtete Kraft zeigt nach oben.

Dies berücksichtigend setzte Minbad als erfahrener Vektoranalytiker an: **F** prop **grad** (**j** ·**A**). Die Abhängigkeit von Querschnittsfläche des Leiters und seiner Länge berücksichtigte er noch durch die Definition **F** = l ·A.**grad** (**j**·**A**) = V·**grad** (**j**·**A**), wenn es sich um einen Leiter mit konstanter Querschnittsfläche A, der Länge l und dem Volumen V handelte. Um eine Definition handelte es sich insofern, als ja vorher zwar Richtungen, aber keine Größe von **A** festgelegt war.

Und jedermann sah, dass Minbads Lehre richtig war. Sie wurde in seinem Land überall an den Schulen eingeführt, und Lehrer wie Schüler erwarben sich beträchtliche Fertigkeiten in der Deutung von elektrischen und magnetischen Kraftwirkungen.

Heute würden wir an dieser Stelle nach der Einheit von **A** fragen: [**A**] = Nm/mA = VAs/mA = Vs/m. Hätte Minbad das damals schon gesehen, wäre er sicher über die Tatsache gestolpert, dass dieses Vektorfeld **A**, bisher nur im Zusammenhang mit *Magneten* auftretend, etwas mit einer *elektrischen* Spannung in Volt zu tun haben soll!

Jedenfalls war es also gelungen, das Vektorfeld **A** über eine Kraftmessung zu bestimmen, wenn auch nur indirekt. Verwunderlich war allerdings, dass das "*Strom*potenzial" hier die entscheidende Rolle spielen sollte. Aber Minbad beruhigte sein physikalisches Gewissen mit einigen vektoranalytischen Umformungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}) &= \mathbf{j}\cdot \mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{j}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{rot}\,(\mathbf{j}\times\mathbf{A})\\ &= \mathbf{j}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{rot}\,(\mathbf{j}\times\mathbf{A})\,,\end{aligned}$$

da ja das Vektorfeld **A** quellfrei sein soll (div **A** = 0).

Da war er wieder, dieser Term mit rot **A**! Aber der letzte Term mit rot (**j** x **A**)? Machte der die Verhältnisse nicht wieder sehr kompliziert? Nur in den seltensten Fällen verschwand er ja identisch, wenn etwa **j** // **A** war. Das war z.B. der Fall, wenn ein Kreisstrom durch ein homogenes Magnetfeld floss, so dass also die Azimutal-Komponenten von beiden Vektoren **j** und **A** überall parallel waren. In einem solchen Spezialfall würde also gelten

$$\mathbf{F} = V\,\mathbf{grad}\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}) = V\;\mathbf{j}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

und es ergäbe sich aus dem Kreuzprodukt eine einfache Regel: Die Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter ist dann, wenn sie entsteht, immer senkrecht zu **j** und senkrecht zu **rot A**, wobei ja **rot A** einige sehr schöne einfache Eigenschaften hat, wie aus den früheren Zeichnungen hervorgeht.

Später stellte sich dann heraus, dass mit der Anwesenheit einer Ladungsdichte ρ und einer Stromdichte **j** in den vorgegebenen Feldern **grad** Φ(**r**) und **A** eine Wechselwirkungs-Energie verbunden ist, für deren Dichte gilt: $w = \mathbf{j}\cdot\mathbf{A} + \rho\cdot\Phi(\mathbf{r})$ mit der elektrischen Ladungsdichte ρ. Es ist - wie man es aus der Mechanik kennt - sehr einsichtig, dass Gradientenbildung von der Energiefunktion die Kraft liefert!

Der letzte Ausdruck für die Kraft wiederum war so einfach, dass der Verdacht nahelag, es sei vielleicht überhaupt besser, statt **F** = V·**grad** (**j**·**A**) anzusetzen: **F** = V·**grad** (**j**·**A**) + V **rot** (**j** x **A**) woraus sich dann immer exakt **F** = V **j** x **rot A** ergäbe. Es gibt ja schließlich genau diese beiden Möglichkeiten, um aus zwei Vektoren **j** und **A** durch Ortsableitungen einen weiteren Vektor zu erzielen. Experimente mit einer Waage, die von einem geschickten Handwerker gebastelt war, bestätigten alle Abhängigkeiten. Damit war klar: Es gilt immer exakt **F** = V **j** x **rot A** und: durch eine magnetische Kraft **F** = V **j** x rot **A** kann man **rot A** messen, nicht **A** direkt!

Um von **rot A** auf **A** zu schließen, fand Minbad schließlich mehrere Methoden, aber immer war klar: Das Ergebnis konnte nicht eindeutig sein: Denn hätte man ein Vektorfeld **A** gefunden, würde jedes andere **A'** mit **A'** = **A** + **grad** Ψ(**r**) mit irgendeiner skalaren Funktion Ψ(**r**) die gleiche magnetische Kraft liefern, weil ja **rot grad** Ψ(**r**) = 0 in allen Fällen.

Nearanite fand folgende Möglichkeiten:

1. Man rät geschickt. Für ein Vektorfeld mit **rot A** = konst. - man nennt das ein "homogenes Magnetfeld" - käme z.B. **A** = - ½ **r** x **rot A** in Frage.

Wenn man auf beide Seite rot anwendet, würde man erhalten: **rot A** = -½ **rot** (**r x rot A**) = -½ [**r** (div **rot A**) - **rot A** div **r** + (**rot A .grad**) **r** - (**r.grad**) **rot A**] = -½ (- 3 **rot A** + **rot A**) = **rot A.**

Das ist zweifellos richtig und wurde von Nearanite als Bestätigung für richtiges Raten angesehen. **A** und **rot A** sollten senkrecht stehen, wie es die Regel von S. 2 verlangt.

2. Man benutzt eine Größe, die später magnetischer Fluss Φ genannt wurde, zusammen mit bestimmten Symmetrieforderungen. Es gilt nämlich für die als magnetischer Fluss definierte Größe Φ: Φ = $\oint$ **A**·**dr** = ∫ **rot A**·**df** nach einem Lehrsatz, der später nach Stokes benannt wurde. ($\oint$ **A**·**dr** kennzeichnet ein Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve C, ∫**rot A** ·**df** ein Flächenintegral über die von C eingeschlossene Fläche.)

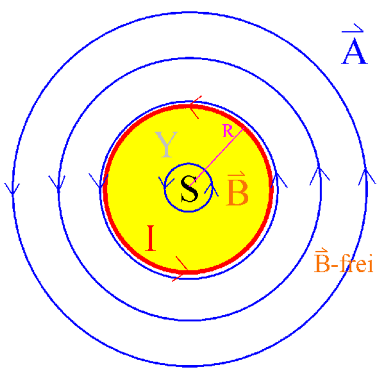

Abb. 13: *Querschnitt durch eine vom Strom I durchflossene Spule mit Magnetfeld **B**. S (vorne) und Y (hinten) sind die Pole des Elektromagneten. Die Feldlinien des Vektorpotenzials liegen auf konzentrischen Kreisen um die Spulenachse. In guter Näherung verläuft **B** = **rot A** ausschließlich im Spuleninneren. Außerhalb der Spule (r > R) gilt: A_Φ prop. 1/r .*

Wenn z.B. **rot A** konstant ist und durch **B** abgekürzt wird - man nennt das ein "homogenes Feld", kann man in Zylinderkoordinaten **rot A** bzw. **B** in z-Richtung wählen; **A** muss dann azimutale Richtung haben. Dann gilt für einen Kreis senkrecht zu **B**: $B_z.r^2\pi = A_\Phi.2.r\pi$, also $A_\Phi = ½\, r\, .B_z = ½\, r$. /**rot A**/ , jedenfalls in dem Bereich, wo B_z konstant ist. Ist dieser Bereich aber bis zu einem bestimmten Radius R begrenzt, verschwindet B_z außerhalb dieses Bereichs, so bleibt für r >= R die linke Seite konstant $B_z.R^2\pi$, und es ergibt sich

$$A_\Phi = ½\, B_z\, R^2\ \ 1/r = ½\ /\mathbf{rot\ A}/\ R^2\ 1/r \quad \text{für } r \geq R$$

Das ist bei einer **sehr langen Strom durchflossenen Zylinderspule** mit dem Radius R der Fall. Außerhalb von ihr gibt es also einen Bereich, in dem A_Φ ganz allmählich abklingt bei gegen ∞ wachsendem Radius r, obwohl dort überhaupt keine Wirbel von **A** vorhanden sind (**rot A** = 0; später sagte man dann lieber: obwohl dort überhaupt kein Magnetfeld **B** vorhanden ist)! Vom Radius r = 0 beginnend steigt A_Φ erst einmal linear an bis zu r = R, und klingt von da an mit 1/r gegen ∞ ab.

Nearanite hielt dies für sehr plausibel und fühlte sich bestätigt.

3. Man benutzt eine Koordinatendarstellung von **rot A**, z.B. Zylinderkoordinaten bei einem zylindersymmetrischen Problem, und liest daraus für jede Komponente von **A** Differentialgleichungen ab, die mit üblichen Methoden gelöst werden. Hierbei muss man aber damit

rechnen, das Integrationskonstanten auftauchen, die sich nicht eindeutig bestimmen lassen. Als Erläuterung dazu führte Nearanite immer das **Vektorfeld eines langen geradlinigen Stromfadens** vor:

Der Strom I fließe in z-Richtung innerhalb eines homogenen Drahtes mit dem Radius R. Aus Symmetriegründen muss dann **A** überall ebenfalls in z-Richtung gerichtet sein, **rot A** ist dann senkrecht dazu, also azimutal.

Es gilt: $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e_z}$ und $\mathbf{rot\ A} = (\mathbf{rot\ A})_\Phi \mathbf{e}_\Phi = -\partial A_z/\partial r\ \mathbf{e}_\Phi$, weil alle anderen Beiträge zu **rot A** verschwinden. Weil $(\text{rot } A)_\Phi = \mu_0/2\pi\ .\ I\ r/R^2$ für $r <= R$ und $(\text{rot } A)_\Phi = \mu_0/2\pi.I.1/r$ für $r > R$, gilt also $\partial A_z/\partial r = -\mu_0/2\pi.I\ r/R^2$ für $r <= R$ und $\partial A_z/\partial r = -\mu_0/2\pi.I.1/r$ für $r > R$ mit irgendeiner Konstanten μ_0. Dann folgt nach Integration über r

$$A_z = -\mu_0/2\pi.I\ (\tfrac{1}{2}\, r^2/R^2 - c)\ \text{ für } r <= R \text{ und}$$

$$A_z = -\mu_0/2\pi.I\ (\ln(r/R) - c')\ \text{ für } r > R$$

c und c' sind noch unbekannte Integrationskonstanten. Weil A_z bei $r = R$ stetig sein soll, gilt

$$\tfrac{1}{2}\, R^2/R^2 - c = \ln(R/R) - c', \text{ also } -c' = -c + \tfrac{1}{2} \text{ und damit}$$

$$A_z = -\mu_0/2\pi.I\ (\tfrac{1}{2}\, r^2/R^2 - c)\qquad \text{für } r \le R \text{ und}$$

$$A_z = -\mu_0/2\pi.I\ (\tfrac{1}{2} + \ln(r/R) - c)\qquad \text{für } r > R\ .$$

Man erhält ein recht einfaches Ergebnis:

$$A_z = \mu_0/2\pi.I\ (c - \tfrac{1}{2}\, r^2/R^2)\qquad \text{für } r \le R$$

und

$$A_z = \mu_0/2\pi.I\ (c - \tfrac{1}{2} - \ln(r/R))\quad \text{für } r > R\quad (*)$$

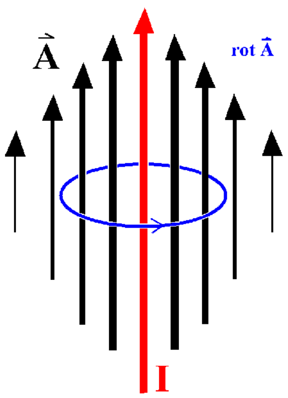

Abb. 14: *Vektorpotenzial **A** bei einem sehr langen geradlinigen vom Strom I durchflossenen Leiter. A ist parallel zum Strom. Je kürzer und dünner der Pfeil, desto kleiner der Betrag von **A**.*

Und Nearanite sah, dass das mathematisch richtig war. Die messbare Größe, **rot A**, hatte ganz vernünftige Ortsabhängigkeiten; davon war Nearanite ja ausgegangen, und die kamen auch wieder heraus, wenn man vom Ergebnis *) die Wirbelstärke berechnet. Aber das Ergebnis widersprach ganz klar aller langjährigen Erfahrung von Nearanite. Nie kommt es in der irdischen Physik vor, dass eine Größe bei der Annäherung an den Rand des Weltalls ($r => \infty$) von einer endlichen Größe ausgehend logarithmisch gegen $-\infty$ strebt, wie das die Beziehung (*) behauptet! Das kann in der Gleichung (*) nicht enthalten sein!

Später konnte man mit einem anderen Verfahren [1] zur Berechnung von **A** den Grund dafür herausfinden. Dort berechnete man zunächst für einen geradlinigen Leiter, der sich von -L bis L erstreckt, das Vektorfeld durch eine Integration. Vereinfacht gesagt wird dabei die Konstante c festgelegt als ln (2.L/R). Die Besonderheit ist, dass sie unabhängig von r gegen ∞ strebt, wenn die Länge 2L des Leiters gegen ∞ geht (aber schneller als r). Die Physik ist gerettet: Wegen der Differenz in (*) strebt A_z im Fernfeld gegen 0, wenn $r => \infty$ (jedenfalls kann man die „unendliche" Konstante c so „hindrehen", dass das geschieht). Das Problem hängt offenbar damit

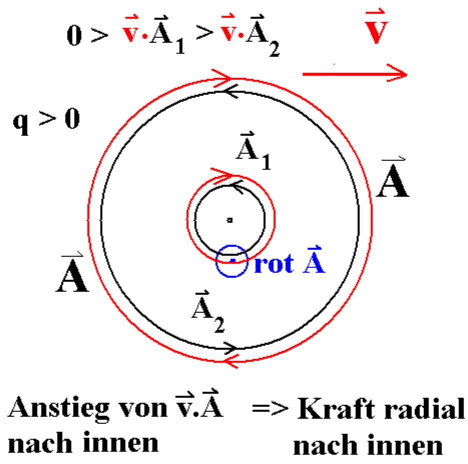

***Abb. 15:** Lorentz-Kraft auf eine bewegte positive Ladung*

zusammen, dass man mit dem unendlich langen geraden Leiter etwas Gekünsteltes in das Problem herein gebracht hat (man muss das allerdings machen, weil sonst **A** nicht die vereinfachende z-Richtung hätte).

Immerhin, die messbaren Größen, die sich aus **A** durch Ableitung ergeben, wurden richtig vorhergesagt.

In Nearanite wuchsen dennoch Zweifel, ob **A** wirklich die vermutete *reale* Größe zur Beschreibung des Magnetismus ist, oder nur eine *Hilfsgröße*, aus der man andere Größe, wie **rot A**, ableiten konnte, die dann als reale Größen aufzufassen wären. So tuschelten jedenfalls manchmal andere Gelehrte hinter vorgehaltener Hand.

Ein Sonderfall im Zusammenhang mit Kraftwirkungen ist die **Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens in einem homogenen Magnet-Feld** (rot **A** = konst) senkrecht zu rot **A**. Dann gilt immer **r** x **A** = 0, und es wäre gleichgültig, ob man auf die allgemeinere Form **F** = q **v** x **rot A** oder auf **F** = q · **grad** (**v**·**A**) mit einem "Geschwindigkeitspotenzial" **v**·**A** zurückgeht.

Abb. 15 erläutert, wie man vom Potenzialberg des Geschwindigkeitspotenzials **v**·**A** zu einer ablenkenden Kraft auf ein positives bewegtes Teilchen kommt, die hier immer zum Zentrum der konzentrischen Kreise gerichtet ist.

Das Potenzialgebirge über der Zeichenebene muss man sich wie ein umgestülptes Wasserglas vorstellen mit dem höchsten Punkt bei r = 0. Die Kraft ist immer den Hang aufwärts gerichtet.

*

Bisher hatte Nearanite die Erfahrung gemacht, dass sich in Leitern die Strom transportierenden Ladungen nur dann dauerhaft bewegen, wenn sie durch ein Potenzialgefälle angetrieben werden. Es hatte sich mittlererweile auch eingebürgert, dieses Potenzialgefälle zur Abkürzung elektrisches Feld **E** zu nennen, also **E** = - **grad** (Φ(**r**)), **E** als Hilfsgröße, damit man nicht so viel schreiben muss. Dieses Feld erzeugt an einer elektrischen Ladung eine elektrische Kraft **F** = q·**E**. Später lernte man, dass dieses elektrische Feld im Leiter nicht die Aufgabe hat, die Ladungen zu bewegen, sondern lediglich, die Energieverluste der strömenden Ladungen im Metallverband gleich wieder zu ersetzen.

Es war ja schon bekannt, dass man durch "Elektrizität", also durch einen elektrischen Strom, ein Vektorfeld **A**, also ein Wirbelfeld, erzeugen kann. Für die **lange stromdurchflossene Spule** liegen ganz ähnliche Verhältnisse vor wie bei einem Stabmagneten, insbesondere umkreisen die **A**-Feldlinien azimutal die Spulenachse. Der Gedanke war nahe liegend, dass man damit abschaltbare Lasthebemagnete würde bauen können oder in anderer Weise Kräfte durch elektrische Ströme würde erzeugen können. Ein Zusammenhang zwischen Magnetismus und Elektrizität war drängte sich auf. Die Berechnung von **A** aus den felderzeugenden Strömen stellte sich allerdings als recht kompliziert heraus. Leichter erhielt man die Wirbel von **A**, also **rot A**; das hatte auch in Europa an der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert der Franzose Ampère gezeigt. Könnte man umgekehrt durch ein **A**-Feld vielleicht auch elektrische Ströme erzeugen?

Nearanite steckte eine langgestreckte stromdurchflossene Spule ("Feldspule") koaxial in eine zweite Spule, die über einen empfindlichen Strommesser zu einem geschlossenen Stromkreis ohne Stromquelle erweitert war. Solange das **A**-Feld längs der Windungen der äußeren Spule unverändert blieb, entstand auch kein Strom. So gilt es auch allgemein: Mit Hilfe eines unveränderlichen **A**-Felds lässt sich kein Strom erzeugen. Sobald sich aber das **A**-Feld längs der Windungen der äußeren Spule in irgendeiner Weise veränderte, entstand ein Strom bzw. ein elektrisches Feld. Das geschah, wenn das **A**-Feld ein- oder ausgeschaltet, oder in seiner Größe verändert wurde, oder wenn die Feldspule in einer bestimmten Weise innerhalb der Induktionsspule bewegt wurde. Aus dem Strom schloss Nearanite indirekt wieder auf das Vorhandensein eines elektrischen Feldes **E**. Das war ein abenteuerlich erscheinender Schluss mit weitreichenden Konsequenzen, die auch heute noch oft übersehen werden: Da der Strom im geschlossenen Leiter immer im Kreis herum fließt, muss auch das ihn aufrecht erhaltende **E**-Feld kreisförmig geschlossen, eben ein Wirbelfeld sein! Nearanite ging deshalb als der Entdecker des **elektrischen Wirbelfelds** in die Geschichte ein, eine Entdeckung, die später das so genannte Informationszeitalter einleiten sollte. Das Phänomen, dass zeitliche Änderungen von **A** ein elektrisches Wirbelfeld **E** zur Folge haben, nannte man später **Induktion**.

Zu Nearanites Zeiten schien damit klar zu sein: Außer einem wirbelfreien elektrischen Feld **E'**, herleitbar aus dem Potenzialgebirge, gibt es noch ein elektrisches Wirbelfeld **E**, das sich nicht aus einem skalaren Potenzial herleiten lässt. Der zweite, für die Anwendungen noch interessantere Punkt war der: Das elektrische Wirbelfeld **E** entsteht instantan an einer bestimmten Stelle, wenn sich dort, also lokal – am gleichen Ort, das Vektorfeld **A** ändert. Nearanite konnte sogar eine Gesetzmäßigkeit für das elektrische Wirbelfeld herleiten:

$$\mathbf{E} = - \partial \mathbf{A}/\partial t.$$

($\partial \mathbf{A}/\partial t$ kennzeichnet die partielle Ableitung von **A** nach der Zeit infolge einer "echten" Zeitabhängigkeit von **A**.)

In Abb. 13 entsteht bei zeitlichen Änderungen von **A** ein elektrisches Wirbelfeld **E**, dessen Feldlinien wie die von **A** die Spulenachse konzentrisch umgeben.

In späterer Zeit gab es andere Erklärungsversuche für dieses Phänomen, das dann "**elektromagnetische Induktion**" genannt wurde. Die Gesetzmäßigkeit $\mathbf{E} = - \partial \mathbf{A}/\partial t$ hieß dann auch „**Induktionsgesetz**“. Die neuen Erklärungen hätten Nearanite weniger befriedigt, weil dort dieses elektrische Wirbelfeld **E** längs einer geschlossenen Kurve C entstehen sollte, wie es auch beobachtet wird, aber eben dann, wenn sich irgendwo **in ihrem Inneren** ein so genanntes Magnetfeld änderte. Das schien ein nichtlokaler Vorgang zu sein, den Nearanite nicht hätte akzeptieren wollen: Wie sollte längs der Kurve C instantan eine Wirkung entstehen, wenn sich weit weg von ihr - in ihrem Inneren - etwas änderte? Eine Wirkung, die das "Innere" gar nicht als Ursache haben dürfte, weil bei unverändertem "Inneren" mit Sicherheit keinerlei Wirkung vorhanden ist!? An eine solche „Fernwirkung“ hätte man sich erst gewöhnen müssen. Die von Nearanite gefundene „Nahwirkung“ - eine zeitliche Änderung von **A** hat an ihrem Ort ein elektrisches Feld **E** zur Folge - erschien viel einsichtiger.

Nachfolgende Generationen von Wissenschaftlern beunruhigte das aber nicht mehr. Konnten sie doch zeigen, dass sich das Induktionsgesetz von Nearanite leicht mit Hilfe des Stokesschen Satzes in eine Form bringen ließ, die ebenfalls das Entstehen des elektrischen Wirbelfelds **E** längs einer geschlossenen Kurve C auf eine Änderung in ihrem Inneren zurückführen ließ, nämlich auf eine Änderung des sog. magnetischen Flusses $\Phi = \int \mathbf{rot\,A} \cdot \mathbf{df}$: Für das Linienintegral $\int_o \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr}$ über eine geschlossene Kurve C gilt nämlich:

$$\int_o \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} \;=\; - d/dt \int_o \mathbf{A} \cdot \mathbf{dr} = - d/dt \int \mathbf{rot\,A} \cdot \mathbf{df} \;=\; - d/dt\, \Phi = \; - d/dt \;\; (/\mathbf{rot\,A}/ \,.\, F)$$

(Der letzte Schritt gilt, wenn **rot A** über die eingeschlossene Fläche F konstant ist. Durch die Erweiterung von $\partial/\partial t$ zu d/dt ist auch zugelassen, dass sich die geschlossene Kurve selbst ändert).

Das letzte Integral Φ wird seit einiger Zeit "**magnetischer Fluss**" genannt. So wurde das Induktionsgesetz später immer formuliert. Aber Nearanites Formulierung war – wie jeder zugeben muss – viel einfacher! Bei einem homogenen Magnetfeld (mit örtlich konstantem **rot A** bzw. **B**) war damit jedoch ein scheinbares Paradoxon erklärt: Sowohl die "lokale" Formulierung des Induktionsgesetzes von Nearanite wie die spätere "nichtlokale" Formulierung nach einem Engländer namens Faraday führten dann auf das gleiche Ergebnis, nämlich dass das Umlaufs-Integral $\int_o \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$ (es wurde später **Ringspannung** genannt) bei einer zeitlichen Änderung von **B** von der eingeschlossenen Fläche F abhängt und nicht von der Länge der einschließenden Kurve C. So waren das offenbar zwei Seiten ein und derselben Medaille: Ursache für die Induktion sind demnach lokale zeitliche Änderungen von **A** längs einer geschlossenen Kurve C bzw. - gleichwertig, aber anders formuliert - nichtlokal verteilte zeitliche Änderungen des magnetischen Flusses in ihrem ganzen Inneren. Daran musste man sich erst gewöhnen, nämlich, dass es in diesem Gebiet, das später Elektrodynamik genannt wurde, lokale und nichtlokale Beziehungen gab, die trotz ihrer Verschiedenheit alle messbaren Wirkungen in der Natur in gleicher Weise richtig beschrieben. Es kamen dann allmählich Zweifel auf, ob eine kausale Interpretation der Beziehungen, wie sie noch Nearanite formuliert hatte, also was die Ursache wovon sei, überhaupt zulässig war, ob es sich nicht vielmehr "nur" um eine konsistente Beschreibung der Sachverhalte handelte, die festlegte, in welchen Beziehungen die einzelnen Größen zueinander standen, wenn sie überhaupt auftraten, aus welchen Gründen auch immer.

Aber das änderte nichts am Verdienst Nearanites, das elektrische Wirbelfeld **E** bei der elektromagnetischen Induktion mit der richtigen Gesetzmäßigkeit gefunden zu haben. Es gab allerdings noch im 21. Jahrhundert "Forschungsinstitute", die das nicht wahr haben wollten und scheinbare Paradoxa in diesem Zusammenhang als Erkenntnis ihrer Forschungen präsentierten (Vgl. den so genannten "Monstein-Effekt" [2]). Sie beruhten immer darauf, dass fälschlich angenommen wurde, Induktion sei nur ein lokaler Vorgang am Ort der Induktionsschleife. Zu solchen scheinbaren Paradoxa gehört auch die so genannte "Induktion ohne Magnetfeld" [3], bei der Induktion wegen einer Magnetfeldänderung stattfindet, obwohl der Leiter längs der geschlossenen Kurve gegen das Magnetfeld total abgeschirmt ist, nicht aber das Innere der geschlossenen Kurve. Und viele andere leugneten immer noch, dass bei der elektromagnetischen Induktion ein elektrisches Wirbelfeld entstehe; so geschah es in der Regel auch in den Schulen. Und es gab auch im 21. Jahrhundert noch Forschergruppen, die das Induktionsgesetz in der Form von Nearanite als etwas Besonderes ansahen, weil Induktion offenbar an Orten stattfand, an denen es überhaupt kein magnetisches Feld **B** gab. Eines dieser damals immer noch Erstaunen hervorrufenden Effekte war der so genannte **Maxwell-Lodge-Versuch** [5] entsprechend der Abbildung 13 auf S. 8. Der dort angegebenen Gesetzmäßigkeit für A_Φ (r) entsprechend muss $\int_o \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$ für einen konzentrischen Kreis , also die Ringspannung U, unabhängig vom Radius r sein. Man wunderte sich, dass das Vektorpotenzial **A** mittels des Induktionsgesetzes reale klassische Effekte hervorrufen könnte, und, sein Augenmerk auf das **B**-Feld richtend, dass dieser Induktionsvorgang offenbar nichtlokal erfolgte: Induktion längs einer Kurve, die weit vom Spuleninneren entfernt war, wo allein sich das **B**-Feld änderte. Hätte man doch auf Minbad gehört! Man hätte viel Geld und Mühe gespart!

*

Die Frage der Nichtlokalität wurde einige Jahrhunderte nach Nearanite, im zwanzigsten Jahrhundert, noch einmal ganz brisant, als zwei Gelehrte aus einer fernen Insel im Nordmeer, **Aharonov und Bohm**, Elektronen durch einen Raum hindurch treten ließen, der von dem Vektorfeld **A** erfüllt war, aber so, dass die Teilchen mit Sicherheit keine Möglichkeit hatten, mit dem "Magnetfeld **B**" in Berührung zu kommen. Das **B**-Feld benutzten mittlerweile viele Wissenschaftler - als Abkürzung für **rot A** - lieber als Nearanites Vektorfeld **A**. Sie ließen dazu Elektronen durch einen Doppelspalt treten und beobachteten auf einem Schirm dahinter ein Interferenzmuster, d.h. sich abwechselnde Stellen, an denen sich viele Elektronen nachweisen ließen und andere, an denen sich nie welche nachweisen ließen. Zum Verständnis dieses Phänomens hatte man ein neues Teilgebiet der Physik erfunden, die Quantenmechanik. Sie erklärte das Phänomen durch einige ungewohnte Annahmen, nämlich einerseits, dass es bestimmte Bahnen der Elektronen von ihrer Quelle durch einen der zwei Spalte zum Nachweisort **nicht** geben könne, weil die Elektronen die früher vermutete Eigenschaft, gleichzeitig einen Ort und eine Geschwindigkeit zu haben, offenbar in keinem Fall besaßen. Andererseits wurde das Phänomen der Interferenz erklärt durch die Konkurrenz von (nur klassisch denkbaren) Möglichkeiten. Immer, wenn nach klassischen Überlegungen die Möglichkeit bestand, dass die Teilchen auf verschiedenen, nicht experimentell unterschiedenen Bahnen ihr Ziel erreichten (quantenmechanisch haben solche Bahnen keinen Sinn), legten Wahrscheinlichkeitsüberlegungen fest, dass manche Ziele ausfielen, während andere bevorzugt wurden, also das Entstehen einer Interferenzfigur.

Bohm und Aharonov stellten nun in den Schattenraum hinter dem Doppelspalt eine extrem lange und dünne Strom durchflossene Spule, in der das Magnetfeld (**B**) - durch einen Eisenkern sogar noch verstärkt und stark gebündelt - auf den Raum innerhalb der Spule begrenzt war. Nach klassischen Vorstellungen gab es keine Möglichkeit, dass ein Elektron diesen "Magnetfeld-Faden" erreichen konnte. Jede klassisch denkbare Bewegungsmöglichkeit beschränkte sich auf einen Raum außerhalb des Magnetfelds **B**. Und dennoch: abhängig von der Größe des magnetischen Flusses in der Spule verschob sich das Interferenzmuster! Es konnte ausgeschlossen werden, dass es extreme klassisch denkbare Bahnen gab, die doch das Magnetfeld erreichten. Das bestätigten ähnliche Versuche mit abgewandelten Anordnungen, wo die Elektronen durch metallische konzentrische Zylinder 100%ig auf den Raum zwischen den Zylindern beschränkt waren, während sich der Magnetfeld-Faden in der Nähe der Zylinderachse befand. Man sprach von einer eindeutig nichtlokalen Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Feld im Magnetfeld-Faden und den weit davon entfernten Elektronen.

Zur Erklärung musste man wieder auf die Vorstellungen von Nearanite zurückgreifen. Denn zwar war das magnetische Feld auf den Magnetfeld-Faden konzentriert, aber das Vektorfeld **A** erfüllte den ganzen Raum, also auch Raumstellen mit **rot A** = 0 (in späterer Sprechweise also ohne Magnetfeld), die zu den klassisch denkbaren Wegen der Elektronen gehörten. Die Theorie lehrte dann auch, dass sich - in heutiger Sprechweise - die Wellenfunktionen für die beiden klassisch denkbaren Möglichkeiten (Durchtritt durch Spalt 1 bzw. Durchtritt durch Spalt 2) durch einen komplexen Phasenfaktor unterschieden, der wieder das alte Vektorfeld **A** enthielt [4].

$\Psi_1(\mathbf{r}) = \Psi_0 \,.\, \exp(\, i f_1)\, \Psi_1'(\mathbf{r})$ und $\Psi_2(\mathbf{r}) = \Psi_0 \,.\, \exp(\, i f_2)\, \Psi_2'(\mathbf{r})$ mit der imaginären Einheit i, wobei $f_1 = \int_1 \mathbf{A}.d\mathbf{s}$ und $f_2 = \int_2 \mathbf{A}.d\mathbf{s}$, und wobei $\Psi_1'(\mathbf{r})$ und $\Psi_2'(\mathbf{r})$ die Wellenfunktionen ohne Anwesenheit des Magnetfelds waren.

Die beiden Integrale gingen vom gemeinsamen Startpunkt bis zum gemeinsamen Überlagerungs-/Nachweispunkt auf dem Schirm; sie unterschieden sich nur durch unterschiedliche Integrationswege. Wegunabhängigkeit ist nur gegeben, wenn überall **rot A** = 0 bzw. **B** = 0, was hier also nicht der Fall ist. Deswegen kommt es bei der Überlagerung von Ψ_1 und Ψ_2 zu konstruktiver oder destruktiver Interferenz, was jeweils vom eingeschlossenen magnetischen Fluss abhängt. Überlagert man die beiden Wellenfunktionen nämlich, so entsteht

$$\Psi_1(\mathbf{r}) + \Psi_2(\mathbf{r}) = \Psi_0 \cdot [\, \exp(i\, f_1).\exp(-i\, f_2)\, \Psi_1'(\mathbf{r}) + \Psi_2'(\mathbf{r})\,]\, \exp(\, i\, f_2).$$

Nur die eckige Klammer ist für die Interferenz zuständig, da bei der Bildung des Betragsquadrats der letzte Exponentialterm wegfällt. Aber $f_1 - f_2$ lässt sich schreiben als Kurvenintegral $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$ über den geschlossenen Weg von Startpunkt über den Nachweispunkt zum Startpunkt zurück. $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$ ist gerade gleich dem eingeschlossenen magnetischen Fluss, in heute üblicherer Schreibweise also $\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}$. Damit ist klar, dass die Größe des eingeschlossenen magnetischen Flusses die Interferenz festlegt, und das obwohl keines der Elektronen das eingeschlossene Magnetfeld erreicht!

So hat also das Vektorfeld **A** von Nearanite doch wieder seine Bedeutung erlangt, und es gibt neue Diskussionen, ob nun **A** oder **B** das eigentlich physikalische Magnetfeld sei, wohingegen man in den letzten hundert Jahren in Europa eher **B** für das physikalische Feld und **A** nur für ein irreales, formales Feld hielt.

Unbehagen rief bei Nearanite vor allem die Tatsache hervor, dass das Vektorfeld **A** nicht eindeutig ist. Zu einem gegebenen Vektorfeld **A** kann man durch eine so genannte Eichtransformation leicht ein weiteres Vektorfeld **A'** finden, das zu den exakt gleichen Beobachtungen führt. Und die Forderung von Nearanite div **A** = 0 , also der Quellenfreiheit von **A** (**A** soll nur geschlossene Feldlinien haben), stellte sich – wie wir heute wissen - als reine, aber in vielen Fällen sinnvolle und naheliegende Willkür heraus. Verzichtete man auf sie, konnte man manche Merkwürdigkeit vermeiden, allerdings wieder um den Preis anderer Merkwürdigkeiten.

*

Unbeirrt von seinen Zweifeln hatte Nearanite, schon gesetzten Alters, versucht, Gleichungen für zeitabhängige Felder zu finden. Wenn keine Ströme vorhanden waren ($\mathbf{j} = 0$) setzte er an:

(**) $\quad \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = -\,1/c^2\, \partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 \qquad$ oder wegen $\qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = -\,\Delta\mathbf{A} + \mathbf{grad}\,(\,\mathrm{div}\,\mathbf{A})$

$$-\Delta\mathbf{A} + \mathbf{grad}\,(\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}) = -\,1/c^2\, \partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 \qquad \text{also, da ja div } \mathbf{A} = 0,$$

$$\Delta\mathbf{A} - 1/c^2\, \partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = 0$$

(In kartesischen Koordinaten ist $\Delta\mathbf{A}$ eine Summe von zweifachen Ableitungen: $\Delta\mathbf{A} = \partial^2\mathbf{A}/\partial x^2 + \partial^2\mathbf{A}/\partial y^2 + \partial^2\mathbf{A}/\partial z^2$).

Es war unklar, wie er auf die Gleichungen gekommen war; seine spärlichen Äußerungen dazu sind heute nicht mehr nachvollziehbar. Sicher waren sie geschickt geraten, wobei vielleicht eine Rolle gespielt hat, dass er zweimal hintereinander die gleiche räumliche Differentiation links angewandt hat in der Hoffnung, dass er dann auch zweimal die gleiche zeitliche Differentiation rechts erhalten muss. Dieser Gedanke war vielleicht nahe liegend in der Kultur seines Landes mit seinem ausgeprägten Gerechtigkeitsstreben: Was dem einen gut tut, soll auch dem anderen gut tun; sicher kein physikalischer Gedanke. Und den Faktor $1/c^2$ hat er zunächst offen gelassen, festzulegen durch zukünftige Experimente. Das Minuszeichen hatte er willkürlich gewählt, damit die Gleichung wenigstens eine halbwegs physikalisch vernünftige Lösung hatte. Wie er auf die Ansätze kam spielt heute keine Rolle mehr, denn das Ergebnis wurde bald darauf experimentell bestätigt, das Ergebnis nämlich, dass die Gleichung eine Ausbreitung des **A**-Feldes in den Raum hinein richtig vorhersagte. Bei zeitabhängigen Strömen war rechts noch ein Term $-\,\mu_0\,\mathbf{j}$ zu ergänzen mit einer bestimmten Konstanten μ_0.

Minbad nannte die Erscheinung übersetzt aus seiner Sprache "die Stimme des leeren Raumes", weil - wie es sich bald zeigte - es damit möglich war, sogar tausende von Meilen weit in den leeren Raum hinauszu"rufen". Ein Kollege von ihm - Hassan Ibn Qalb, Onkel des ebenfalls berühmten Yussaf Ibn Qalb - gelang es in einer Stadt mit dem fremdländischen Namen Karlsruhe, "die Stimme des leeren Raumes" im Experiment nachzuweisen und damit eine Nachricht zu übertragen; c war damit als die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum identifiziert, dessen Existenz allerdings damals immer noch umstritten war. Griechische und islamische Wissenschaftler hatten schon im Altertum und erst recht im Mittelalter Gründe angeführt, weshalb es einen leeren Raum ihrer Meinung nach nicht geben konnte, und christliche Gelehrte in Europa waren ihnen gefolgt, hatten sich sogar noch religiös erscheinende Gründe für seine Unmöglichkeit ausgedacht. Heutzutage nennt man die Erscheinung "**elektromagnetische Welle**", und der Leser weiß, dass sie keinen Träger braucht und sich durch das Vakuum hindurch ausbreiten kann, sogar durch den leeren Raum zwischen den Gestirnen.

So gab es nun also zwei Gleichungen in der Elektrodynamik (Φ kennzeichnet jetzt wieder das Potenzialgebirge): $\Delta\Phi = -1/\varepsilon_0\,\rho$ und $\Delta\mathbf{A} - 1/c^2\,\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = -\mu_0\,\mathbf{j}$, die eine zuständig für die Elektrostatik, die andere für die Magnetostatik, aber auch für die Induktion und die "Stimme des leeren Raumes". Mathematiker entwickelten Lösungsverfahren, und so schien die Welt der Elektrizität und des Magnetismus in Ordnung zu sein.

Nur Nearnite gefiel es nicht, dass die beiden Gleichungen so unsymmetrisch waren. Die erste Gleichung konnte offenbar auch angewendet werden, wenn die Ladungsverteilung und damit das Potenzialfeld zeitabhängig war. Überlegungen zur Deutung der Wellenausbreitung legten nahe, dass in der zweiten Gleichung das Induktionsgesetz $\mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{A}/\partial t$ eine Rolle spielen musste. Wie kam es herein? $\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2$ führte auf $\partial\mathbf{E}/\partial t$, und weil Nearanite mittlerweile zwei Beiträge zu $\mathbf{E}$ gefunden hatte: $-\,\mathbf{grad}\,\Phi$ und $-\,\partial\mathbf{A}/\partial t$, ist das im allgemeinen Fall $-\,\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 - \partial/\partial t\,\mathbf{grad}\,\Phi$. Nearanite grübelte Tag und Nacht, wohin der letzte Term verschwunden sein könnte. Oder müsste er vielleicht in der zweiten Gleichung erst noch ergänzt werden? Dann wäre sie noch unsymmetrischer im Vergleich zur ersten; die Mathematik ihrer Lösung wäre kaum mehr überschaubar, weil beide Gleichungen durch den Term verkoppelt würden. Niemand sah einen Ausweg.

*

Nearanite war alt geworden. Manche seiner Kollegen belächelten ihn, weil er doch so bedeutende Entdeckungen gemacht habe und jetzt auf einmal nicht mehr an sie glaubte. Andere konnten überhaupt nicht nachvollziehen, dass ein ästhetischer Gesichtspunkt, wie die von ihm verlangte Symmetrie, überhaupt ein physikalisches Argument sein sollte. Und dass er jetzt gar an **A** zweifelte, weil das Feld nicht eindeutig sei, quittierten viele Kollegen achselzuckend mit der wohl richtigen Bemerkung, dass aber alle nachweisbaren Folgerungen eindeutig seien. Und er brauche ja nur die mittlerweile häufig benutzten Felder **E** und **B** nehmen; die seien eindeutig. Es gab sogar Kollegen, die hielten es für einen ernst zu nehmenden Einwand gegen seine Vorstellungen, dass er seine Feldgleichungen nicht "richtig" hergeleitet habe, und das obwohl alle ihre physikalischen Folgerungen im Experiment bestätigt waren! Sie neigten auch zur Kritik an dem einfach *erratenen* Minuszeichen in Gleichung (**), das ja offen so gewählt war, "dass das herauskam, was herauskommen sollte". So hatte Nearanite schon viele Jahre keine neuen Entdeckungen gemacht, aber die Problematik ließ ihn nicht los. Viel von seiner wertvollen Zeit zu überlegen nahm ihm auch seine Berühmtheit: Er musste ständig Gelehrte, Studenten und auch Sänger empfangen, die seinen Ruhm in ihren Liedern weiter verbreiten wollten.

Da stellte ein junger Student "dumme" Fragen: Warum habe Nearanite denn angenommen, dass das **A**-Feld keine Quellen habe (div **A** = 0)? Könnten vielleicht zeitabhängige **A**-Felder Quellen haben? Und wenn das der Fall wäre, vielleicht liefert dann das (fälschlich) immer 0 gesetzte div **A** gerade einen Beitrag, der den Problemterm gerade aufhebt? Nearanite wusste keine Antwort. Aber in der Nacht begann es in seinem Kopf zu rumoren. Am nächsten Tag beschrieb er viele Papierblätter mit vielen Formeln, auf allen stand oben: div **A** = ... mit jeweils anderen erratenen Ausdrücken auf der rechten Seite. Am Abend stand auf einem der Blätter oben: div **A** = - $1/c^2\ \partial\Phi/\partial t$ bzw. div **A** + $1/c^2\ \partial\Phi/\partial t = 0$ (wobei $1/c^2 = \varepsilon_0 \cdot \mu_0$ mit Konstanten, die dem Leser sicher vertraut sind) und unten :

$$\Delta\Phi - 1/c^2\ \partial^2\Phi/\partial t^2 = -\ 1/\varepsilon_0\ \rho$$

$$\Delta\mathbf{A} - 1/c^2\ \partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = -\ \mu_0\ \mathbf{j}$$

zwei vollkommen symmetrische Gleichungen; das Ziel war erreicht! Auf diese Gleichungen konnte man bauen. Sie befriedigten das ästhetische Empfinden von allen Gelehrten, und alle ihrer Folgerungen waren bald durch Experimente bestätigt. Wenn man noch die später so genannte Eichregel div **A** + $1/c^2\ \partial\Phi/\partial t = 0$ und die Definitionsgleichungen **B** = rot **A** und **E** = - $\partial\mathbf{A}/\partial t$ - **grad** Φ hinzunimmt, sind sie äquivalent zu den späteren "Maxwell-Gleichungen" - wie sich in der Folge herausstellte.

Bloß: was trug die neue Erkenntnis zur Frage bei, ob das vieldeutige **A** - und dann wohl auch Φ - überhaupt physikalische Realität besitzt?

Nearanite konnte diese Frage nicht mehr klären. Die Einfachheit einer Theorie, die auf Φ und **A** baute, ihre Symmetrie und Ästhetik, ebenfalls ihre lückenlose Geschlossenheit - später sagte man Konsistenz dazu - sprachen nach seiner Ansicht sehr für die Realität von **A** und Φ. Dass sie nicht direkt messbar waren, sondern nur über örtliche und zeitliche Ableitungen von ihnen (- **grad** Φ - $\partial\mathbf{A}/\partial t$ und **rot A**), dass sie nicht eindeutig waren, dass es verschiedene Definitionen von ihnen gab, die die gleichen beobachtbaren physikalischen Folgerungen zeigten, sprach seiner Ansicht nach gegen ihre Realität. Die Frage der Lokalität bzw. Nichtlokalität begünstigte manchmal die Realität von Φ und **A**, manchmal die Realität von **E** und **B**, je nach Formulierung. Offenbar hatte das ganze physikalische Gebiet nichtlokale Aspekte, die durch keine Formulierung ganz zum Verschwinden gebracht werden konnten.

Ein Student aus einem fernen Land am Meer wies später nach, dass es einen weiten Spielraum für Φ und **A** gibt um die Physik der Elektrizität und des Magnetismus richtig zu beschreiben. So genannte "Eichtransformationen" gaben diesen Spielraum an, ohne die physikalischen Folgerungen zu verändern. Sie betrafen Φ und **A** gleichzeitig. Und die Wahl div **A** = 0 und div **A** = - $1/c^2\ \partial\Phi/\partial t$ waren nur zwei der vielen Möglichkeiten; die letzte nannte man später übrigens Lorentz-Eichung. Man erkannte, dass man Elektrizität und Magnetismus nicht mehr als getrennte Erscheinungen betrachten darf; man sprach stattdessen längst vom "elektromagnetischen Feld", wie es sich schon in den symmetrischen Gleichungen Nearanites, seiner letzter Erfindung, angedeutet hatte.

Ein letzter Triumph, den Nearanite nicht mehr erleben konnte, genauso wenig wie den erwähnten Aharonov-Bohm-Effekt, war die Entdeckung der **Relativitätstheorie** im zwanzigsten Jahrhundert. Sie ließ sich mit den Feldern Φ und **A** in der Lorentz-Eichung, aber auch mit **E** und **B** in ästhetischer Weise formulieren. Aber wie viel einfacher war doch der Gebrauch von Nearanites Feldern Φ und **A**! Statt mit 6 Größen (den 6 Komponenten der Felder: E_x, E_y, E_z und B_x, B_y, B_z) kam man mit maximal 4 Größen (Φ und A_x, A_y, A_z) aus, deren Zahl durch die Eichung noch reduziert werden konnte. Und ein Beobachter in einem Bezugssystem brauchte auch nur die 4 Größen Φ und **A** mit Hilfe einer "Lorentztransformation" umrechnen in die eines im Vergleich zu ihm bewegten Beobachters, und nicht etwa 16, um zu wissen, wie dieser Beobachter elektromagnetische Vorgänge beschreiben würde. Und als dann gar noch die **Quantentheorie der elektromagnetischen Felder** entdeckt war, stellt es sich heraus, dass es genau Nearanites Felder **Φ** und **A** waren, die zu einer deutlich einfacheren Formulierung führten, dass sie den "Wellenfunktionen" der nichtrelativistischen Quantenmechanik entsprachen. Und Wechselwirkungen mit Strömen und Ladungen wurden hier grundsätzlich mit einer aus der Energiedichte $w = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} + \rho.\Phi(\mathbf{r})$ abgeleiteten Beziehung angesetzt. Bezüglich der zu wählenden Eichung gab es für jede Vor- und Nachteile, und auch die diskutierte Nichtlokalität ließ sich in keinem Fall ganz wegdiskutieren. Man konnte sie durch bestimmte Formulierungen verstecken, aber irgendwo tauchte sie wieder auf.

*

In Bagdad war Anfang des 21. Jahrhunderts von der Internationalen Physikalischen Gesellschaft die Aufstellung eines Gedenksteins an Nearanites Grab mit der Inschrift geplant: "Hier ruht ein genialer Wissenschaftler. Ihm gelangen viele Entdeckungen zum Wohl der Menschheit. Er gestaltete die moderne Welt mit. Von ihm erhielten Wissenschaft und Technik für viele Jahrhunderte Anstöße. Seine Größe liegt auch darin, dass seine Zweifel an seinen eigenen Lehren ihn nicht davon abhalten konnten, konsequent seine Ideen weiter zu verfolgen."

Wegen des Kriegs eines zu Nearanites Zeit noch gar nicht existierenden Landes gegen den Gewaltherrscher von Bagdad konnte der Grabstein nicht aufgestellt werden. Das Grab selbst ist mittlerweile verschollen, so wie auch in Hamburg das Grab Otto von Guerickes verschwunden ist, der in Europa erstmals Argumente für den Gedanken zusammengetragen hatte, dass sich eine Wirkung in den leeren Raum hinaus bis zu fernsten Sternen ausbreiten konnte. Es ist ebenso verschwunden wie das Grab Mozarts in Wien, der der Menschheit gezeigt hatte, wie schön auch andere Produkte des menschlichen Geistes sein können.

Literatur

[1] R.J. Jelitto, Elektrodynamik, Theoretische Physik 3, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, S. 107

[2] Zum esoterischen „Hooper-Monstein-Effekt“: z.B. www.rqm.ch/Reflexionen Hilscher.htm, http://jnaudin.free.fr/html/hoopmnst.htm , und seine Klarstellung: http://www.forphys.de/Website/induktion/induktion.html

[3] U. Manthel, P. Täubert, Zur Induktionsspannung, Eine kritische Betrachtung, PdN-Ph, Heft 6, 1986, S. 24 - 27

[4] S. Gasiorowicz, Quantenphysik, R. Oldenbourg Verlag, München, 1977

[5] Maxwell-Lodge statt Aharonov-Bohm, http://www.pro-physik.de/Phy/leadArticle.do?laid=10910, 2008