

# Gibt es Materiewellen – etwa beim Atomlaser?

Horst Hübél  
© Würzburg, März 2014

## Zusammenfassung

Elektromagnetische Wellen und Schallwellen etc. breiten sich im uns umgebenden Anschauungsraum aus, Wellenfunktionen der Quantenphysik hingegen in abstrakten Konfigurationsräumen von oft hoher Dimension. Bei Wellenfunktionen von Materiewellen zu sprechen hat also einen anderen Sinn als bei einer elektromagnetischen Welle. Tatsächlich taugen Wellenfunktionen nur zur Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse. Andererseits zeigte Glauber 1963 wie klassische elektromagnetische Wellen mit den Erwartungswerten quantisierter Felder bzgl. kohärenter Zustände zusammenhängen. Ähnlich werden hier für den Atomlaser reellwertige („klassische“) Wellen konstruiert, die sich im Anschauungsraum ausbreiten und in gleicher Weise mit den Erwartungswerten quantisierter Felder zusammenhängen. Sie könnten mit mehr Recht als Materiewellen bezeichnet werden.

## Do matter waves exist ? Maybe at an atom laser?

Horst Hübél  
© Würzburg, März 2014

## Abstract

Electromagnetic waves and sound waves etc. propagate in ordinary space surrounding us, whereas wave functions of quantum physics propagate in abstract configuration spaces, often of high dimension. On the other side Glauber showed 1963 how classical electromagnetic waves are related to expectation values of quantized fields with respect to coherent states. Here for an atom laser are constructed in a similar way real valued („classical“) waves propagating in ordinary space. They are related in an equal way to expectation values of quantized fields. They could be called matter waves with more reason.

## 1. Einführung

Bei elektromagnetischen Wellen breiten sich elektromagnetische Felder wellenförmig aus, bei Schallwellen Schall, bei Druckwellen Druckverteilungen. Dementsprechend würde man vermuten, dass sich bei „Materiewellen“ Materie wellenförmig ausbreitet.

Charakteristisch für Wellen in der klassischen Physik ist Interferenz. Überlagern sich zwei Wellen gleicher Wellenlänge und geeigneter Amplitude, dann entstehen Maxima und Minima, aus deren Lage man rückwärts auf die Wellenlänge schließen kann. Früher hat man Interferenz auch als Indiz für einen „Wellencharakter“ der Strahlung genommen, heute unterscheidet man häufig zwischen Welleninterferenz und Einteilchen-Interferenz, bei der bereits ein einzelnes Teilchen zur Interferenz führt, die allerdings erst nachweisbar wird nach sehr vielen Versuchen mit identischen einzelnen Teilchen.

Bei den „deBroglie-Wellen“ der Quantenphysik fand man tatsächlich Interferenz-Erscheinungen, konnte auch richtig auf die Größe der „deBroglie-Wellenlänge“ schließen. Man bezeichnete diese Wellen historisch deshalb als „Materiewellen“. Auf Schrödingers und Heisenbergs Vorschlägen

wurde dann auch die gültige Quantentheorie aufgebaut. Doch bald stellte sich heraus, dass sich diese Wellen (im Sinne von Wellenfunktionen) nicht im uns umgebenden Anschauungsraum ausbreiten, wie etwa die zugehörigen klassischen Teilchen. Nach „Borns Wahrscheinlichkeitsdeutung“ sind diese Wellen nur tauglich zum Vorherberechnen von Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Messwerten an den zugehörigen Quantenobjekten (z.B. Quantenteilchen). Mathematisch gesehen breiten sie sich in häufig hochdimensionalen Konfigurationsräumen aus. So ist die Wellenfunktion für einen Zweiteilchen-Zustand (Teilchen-Zwilling) bereits 6-dimensional. Obwohl man einer neuen Erscheinung fast jeden beliebigen Namen geben kann, also auch den Namen „Materiewellen“, muss man sich entweder bewusst sein, dass die Namensbildung hier anders erfolgt als etwa bei elektromagnetischen Wellen, oder man muss sich fragen, ob es vielleicht Wellen gibt, auf die der Name „Materiewellen“ besser passen könnte als auf Wellenfunktionen.

Seit Glauber (1963) versteht man den Zusammenhang zwischen klassischen elektromagnetischen Wellen und ihrer quantentheoretischen Beschreibung besser. Wenn man für die Feldoperatoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  bei einer monochromatischen Lasermode Erwartungswerte  $\langle \mathbf{E} \rangle$  und  $\langle \mathbf{B} \rangle$  bildet bzgl. so genannter **kohärenter Zustände**, dann zeigen diese Erwartungswerte die Zeit- und Ortsabhängigkeit klassischer Wellen. Kohärente Zustände sind bestimmte Überlagerungszustände von Zuständen mit bestimmter<sup>1</sup> Teilchenzahl. Die Teilchenzahl ist unbestimmt. Es gibt einen Erwartungswert  $\langle n \rangle$  für die Teilchenzahl (mittlere Teilchenzahl), um den eine gemessene Teilchenzahl evtl. stark streut. Zuständig ist eine Poisson-Verteilung (siehe Anhang).

Ebenso streuen Messwerte für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  stark um ihre Erwartungswerte  $\langle \mathbf{E} \rangle$  und  $\langle \mathbf{B} \rangle$  (Mittelwerte). Mit zunehmender mittlerer Teilchenzahl  $\langle n \rangle$  wächst zwar die absolute Streuung (gemäß  $\Delta n = \sqrt{\langle n \rangle}$ ), aber die relative Streuung  $\Delta n / \langle n \rangle = 1 / \sqrt{\langle n \rangle}$  sinkt und strebt für  $\langle n \rangle \Rightarrow \infty$  gegen 0. D.h. Messwerte für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  weichen vom Erwartungswert (der sich wie bei einer klassischen Welle verhält) relativ immer weniger ab, je größer die mittlere Teilchenzahl wird: Das elektromagnetische Feld in kohärenten Zuständen mit sehr großer mittlerer Teilchenzahl verhält sich bei einer Lasermode in diesem Sinn fast perfekt wie eine klassische elektromagnetische Welle mit kaum nachweisbarer statistischer Streuung.

Bzgl. Zuständen mit bestimmter Teilchenzahl (Teilchen-Zustände, Fock-Zustände), verschwinden diese Erwartungswerte, ganz gleich, wie hoch die Teilchenzahl ist: Elektromagnetische Felder in Teilchenzuständen verhalten sich niemals wie klassische elektromagnetische Wellen.

Ähnliche Überlegungen wurden für kohärente Phononen oder Polaritonen in Festkörpern durchgeführt. Auf Schrödinger geht wohl in den 30-er Jahren eine ähnliche Überlegung für den harmonischen Oszillator eines 1-Teilchen-Problems zurück.

Für einen Atomlaser, bei dem bei extrem tiefer Temperatur sehr viele (größenordnungsmäßig  $10^5$ ) bosonische Atome in einen Zustand mit gleicher Energie und gleichem Impuls  $\mathbf{p} = \hbar \cdot \mathbf{k}$  kondensiert sind, wiesen Öttl et al. 2005/2006 nach, dass in einem festen Zeitintervall die Zahl der dort gezählten Atome einer Poisson-Verteilung genügt, ganz genauso wie bei einer Mode eines Lichtlasers, typisch für einen kohärenten Zustand. Zerstört man das Kondensat, indem man die Temperatur über die kritische Temperatur hinaus erhöht, resultiert eine völlig andere Statistik. Offenbar gibt es für die Atome eines Atomlasers unterhalb der kritischen Temperatur kohärente Zustände.

Die Frage, die hier untersucht werden soll, ist, ob es auch hier eine klassische Welle geben könnte,

---

<sup>1</sup> Zur Unterscheidung von den gleichlautenden umgangssprachlichen Begriffen habe ich mir angewöhnt, die quantenphysikalischen Begriffe bestimmt, unbestimmt entgegen der Duden-Vorschrift mit Bindestrich zu schreiben.

die sich analog zum elektromagnetischen Feld in sich klassisch verhaltenden Erwartungswerten bzgl. solcher kohärenter Zustände äußern könnte.

Für die folgenden Überlegungen soll völlig außer acht gelassen werden, dass die Atome im Unterschied zu den Photonen der elektromagnetischen Welle stark wechselwirken. Üblicherweise wird diese Wechselwirkung in einer Gross-Pitaevsii-Gleichung für eine Wellenfunktion des Kondensats berücksichtigt, die eine gewisse Ähnlichkeit zu einer Schrödinger-Gleichung besitzt. Das geschieht z.B. bei der Untersuchung der kritischen Temperatur eines Kondensats. Hier dagegen sollen wechselwirkungsfreie, „freie“ (kräftefreie) nichtrelativistische, bosonische Teilchen betrachtet werden, eine völlig unbrauchbare Näherung für die Frage nach der kritischen Temperatur. Ich vermute dagegen, dass die hier zu untersuchende Fragestellung unabhängig von sonst wesentlichen Details der Wechselwirkung sind.

Wir gehen aus von einem nichtrelativistischen quantisierten Schrödinger-Feld  $\Psi(x,t)$  mit dem Hamilton-Operator  $H$  für ein freies Boson. Es wird sich herausstellen, dass aus ihm neue Felder  $\mu(x,t)$  und  $\nu(x,t)$  konstruiert werden können, die zu einem weitgehend äquivalenten Hamilton- und Teilchenzahl-Operator führen. Es werden jeweils Erwartungswerte bzgl. kohärenter Zustände gebildet. Es stellt sich heraus, dass die Erwartungswerte dieser Felder die klassisch zu erwartende Abhängigkeit von Ort und Zeit haben (anders als bei  $\Psi(x,t)$  und anders als in Fock-Zuständen; dort verschwinden die Erwartungswerte der Felder  $\mu(x,t)$  und  $\nu(x,t)$  genauso wie die von  $\Psi(x,t)$ ). Erwartungswerte des Teilchenzahl-Operators verhalten sich sogar bei Interferenz wie bei klassischen Wellen.

Wenn das der Fall ist, könnte man solche Wellen mit mehr Recht als „Materiewellen“ bezeichnen.

Abgesehen davon sind einerseits Beschreibungen durch das Schrödinger-Feld  $\Psi(x,t)$  oder durch die neuen „Materie-Felder“  $\mu(x,t)$  und  $\nu(x,t)$  weitgehend äquivalent bzgl. der Dynamik (Hamilton-Operator) und des Teilchenzahl-Operators. Andererseits zeigt sich bzgl. kohärenter Zustände klassisches Verhalten bei Erwartungswerten der Feldstärken und bei der Interferenz. Bei Fock-Zuständen ist das ebenso wenig der Fall wie beim ursprünglichen Schrödinger-Feld: die Erwartungswerte verschwinden hier. Bzgl. der statistischen Streuungen um die Erwartungswerte gelten die Aussagen wie bei allen kohärenten Zuständen.

## **2.1 Ansatz des quantisierten Schrödinger-Felds für wechselwirkungsfreie nichtrelativistische Bosonen**

Vom quantisierten Schrödinger-Feld kommt man zu Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Messwerten oder zu Übergangswahrscheinlichkeiten durch die Bildung von Matrix-Elementen bzgl. bestimmter Zustände. Hier sollen nur bestimmte Zustände von bosonischen Atomen betrachtet werden. Wir stellen uns vor, dass nichtrelativistische Atome entweder

a) einzeln jeweils in den gleichen Zustand mit dem Impuls  $\mathbf{p} = \hbar \cdot \mathbf{k}$  präpariert werden, wobei  $\hbar \cdot |\mathbf{k}| = h/(2 \cdot \pi) \cdot 2 \cdot \pi / \lambda = h/\lambda$  mit der deBroglie-Wellenlänge  $\lambda$  und dem Wellenzahl-Vektor  $\mathbf{k}$ , oder

b) sehr viele identische Atome in den durch den gleichen Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  gekennzeichneten Zustand kondensiert werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit formulieren wir dies als 1-dimensionales Problem mit  $\hbar \cdot \mathbf{k} = \hbar \cdot |\mathbf{k}|$ .

Es genügt im Hinblick auf die interessierenden Matrixelemente des Feldoperators, von der Entwick-

lung des Schrödinger-Felds nach allen möglichen Impulsen nur den Anteil zum gewählten Impuls anzuschreiben, also

$$\Psi(x,t) = f \cdot \{ a_k \cdot \exp[i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)] + \dots \}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Psi^+(x,t) &= \Psi_k^+ + \dots & \text{mit } \Psi_k^+ &= f \cdot a^+ \cdot \exp[-i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)] \text{ und entsprechend} \\ \Psi(x,t) &= \Psi_k + \dots & \text{mit } \Psi_k &= f \cdot a \cdot \exp[i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)] \end{aligned}$$

f ist dabei ein Normierungsfaktor in der Größenordnung von 1,  $k = p/\hbar = 2 \cdot \pi/\lambda$  und  $\hbar \omega = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$ . a ist der Vernichtungsoperator,  $a^+$  der Erzeugungsoperator für ein Teilchen mit dem Impuls p. Als Teil der folgenden symbolischen Schreibweise wird der Index k häufig weggelassen. Für Erzeugungs- und Vernichtungsoperator (jeweils zum gleichen Impuls) gelten die Vertauschungsoperationen:

$$[a, a^+] = 1, [a, a] = 0, [a^+, a^+] = 0$$

$\exp[i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)]$  wird im Folgenden oft mit  $\exp[+]$  abgekürzt,  $\exp[-i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)]$  mit  $\exp[-]$ .

## 2.2 Vertauschungsoperationen für die Feldoperatoren

Abgekürzt gilt für den wesentlichen Anteil:

$$\begin{aligned} [\Psi, \Psi^+] &= \Psi \cdot \Psi^+ - \Psi^+ \cdot \Psi = f^2 \cdot \{ a \cdot \exp[+] \cdot a^+ \cdot \exp[-] - a^+ \cdot a \} = f^2 \\ [\Psi, \Psi] &= 0, \quad [\Psi^+, \Psi^+] = 0 \end{aligned}$$

$[\Psi, \Psi^+] = 0$  auch für Feldoperatoren zu unterschiedlichen Impulsen.

## 2.3 Hamilton-Operator

Wir setzen an:  $H = 1/f^2 \hbar \omega \Psi^+ \cdot \Psi = \hbar \omega a^+ \cdot a + \dots$   
und es gilt nach der Heisenberg-Gleichung:

$$\begin{aligned} i \hbar \partial \Psi / \partial t &= [\Psi, H] = 1/f^2 \hbar \omega [\Psi, \Psi^+ \cdot \Psi] = 1/f^2 \hbar \omega [\Psi \cdot \Psi^+ \cdot \Psi - \Psi^+ \cdot \Psi \cdot \Psi] = 1/f^2 \hbar \omega [\Psi, \Psi^+] \cdot \Psi \\ &= 1/f^2 \hbar \omega f^2 \cdot \Psi = \hbar \omega \cdot \Psi \end{aligned}$$

wie es sich auch durch direktes Ableiten des Einzelterms  $\Psi_k$  ergibt. Eine mit allen Impulsanteilen komplettierte Rechnung führt zum gleichen Ergebnis.

## 2.4 Matrixelemente des Feldoperators

Bzgl. n-Teilchen-Zuständen (Fock-Zuständen:  $|n\rangle$ ) zum gleichen Impuls haben die Feldoperatoren verschwindende Matrixelemente, denn es gilt:

$\Psi|n\rangle = \alpha' |n-1\rangle$  und  $\Psi^+|n\rangle = \alpha |n+1\rangle$  mit irgendwelchen komplexen Zahlen  $\alpha, \alpha'$  und der Orthogonalität der n-Teilchen-Zustände,

also  $\langle n|\Psi|n\rangle = 0$  und  $\langle n|\Psi^+|n\rangle = 0$ .

Das ist nicht der Fall bzgl. kohärenten Zuständen  $|z\rangle = \sum \beta_n |n\rangle$  mit den üblichen Entwicklungskoeffizienten<sup>2</sup> für kohärente Zustände, da sich in den Summen über die Teilchenzahlen immer geeignete Partner finden lassen. Es gilt also

$\langle z|\Psi|z\rangle \neq 0$  und  $\langle z|\Psi^+|z\rangle \neq 0$ .

Bzgl. der Fragestellung (Matrixelemente zu reellen, fast klassischen Wellen?) erhalten wir entweder immer verschwindende Matrixelemente bei Fock-Zuständen oder zwar nicht verschwindende, aber komplexwertige Matrixelemente bei kohärenten Zuständen:

Mit dem Schrödinger-Feld  $\Psi$  lassen sich keine quasi klassischen Wellen gewinnen.

## 2.5 Teilchenzahl-Operator

Wir definieren:

$N_k = 1/f^2 \Psi_k^+ \Psi_k$  und es folgt:

$N = a^+ \cdot a$  mit den Eigenwerten 0, 1, 2, ...

Es folgen die Matrixelemente bzgl. Fock- und kohärenten Zuständen.

$\langle n|N|n\rangle = n$  und  $\langle z|N|z\rangle = \langle z|a^+ \cdot a|z\rangle = |z|^2 = \langle n\rangle$ , wie üblich.

## 2.6 Interferenz

Es sollen sich zwei Wellen mit gleichem Impuls, aber einer Phasenverschiebung  $\varphi$ , überlagern. Nur der wesentliche Anteil zur Wellenzahl  $k$  wird (symbolisch) angeschrieben:

$$\Psi_1 = f a_k \exp(+i\varphi) \quad \Psi_2 = f a_k \exp(+i\varphi) e^{i\varphi} = \Psi_1^+ e^{i\varphi}$$

$$\Psi_1^+ = f a_k^+ \exp(-i\varphi) \quad \Psi_2^+ = f a_k^+ \exp(-i\varphi) e^{-i\varphi} = \Psi_2^+ e^{-i\varphi}$$

$$\text{Also: } \Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_1 (1 + e^{i\varphi}) \quad \text{und} \quad \Psi_1^+ + \Psi_2^+ = \Psi_1^+ (1 + e^{-i\varphi})$$

Wir überlagern:

$$1/f^2 (\Psi_1^+ + \Psi_2^+) (\Psi_1 + \Psi_2) = 1/f^2 \Psi_1^+ \Psi_1 (1 + e^{-i\varphi})(1 + e^{i\varphi}) = 1/f^2 \Psi_1^+ \Psi_1 [2 + 2\cos(\varphi)] = a^+ \cdot a [2 + 2\cos(\varphi)]$$

Die Matrixelemente bzgl.  $n$ -Teilchen-Zuständen bzw. kohärenten Zuständen – proportional zu den jeweiligen Intensitäten – sind also:

$$\langle n|a^+ \cdot a|n\rangle [2 + 2\cos(\varphi)] = 2 \cdot n \cdot [1 + \cos(\varphi)]$$

$$\langle z|a^+ \cdot a|z\rangle [2 + 2\cos(\varphi)] = 2 \cdot \langle n\rangle \cdot [1 + \cos(\varphi)]$$

Für Phasenverschiebung 0 (allgemein: Maximum) erhalten wir wie üblich  $4 \cdot n$  bzw.  $4 \cdot \langle n\rangle$ , für Phasenverschiebung  $\pi$  (allgemein: Minimum) ergibt sich 0. Wir haben also mit dem Schrödinger-Feld bzgl. von  $n$ -Teilchen- bzw. kohärenten Zuständen gleichen Impulses  $p$  die klassischen Resultate reproduziert. Kohärente Zustände wirken sich nur so aus, dass die Teilchenzahl  $n$  durch

<sup>2</sup> Es gilt für eine beliebige komplexe Zahl  $z$ :  $a|z\rangle = z|z\rangle$  und auch  $|z\rangle = \sum \beta_n |n\rangle$ , wobei die Summe von 0 bis  $\infty$  läuft und  $|\beta_n|^2 = (\langle n\rangle^n / n!) \exp(-\langle n\rangle)$ .  $\langle n\rangle$  ist der Erwartungswert von  $n$ ,  $z$  ein Eigenwert des Vernichtungsoperators  $a$ . Es gilt:  $|z|^2 = \langle n\rangle$ .

die mittlere Teilchenzahl  $\langle n \rangle$  zu ersetzen ist. Für  $n = 1$  beschreibt das Ergebnis Einteilchen-Interferenz. Mit einem Atomlaser würde man Interferenzen entsprechend der kohärenten Zustände erhalten: kein wesentlicher Unterschied.

### 3.1 Konstruktion von „Materiewellen-Operatoren“

Wir definieren:

$$\mu_k(x,t) = \frac{1}{2} (\Psi_k + \Psi_k^+) = \frac{1}{2} (\Psi + \Psi^+) \quad \text{und} \quad \mu_k^+(x,t) = \frac{1}{2} (\Psi_k^+ + \Psi_k) = \frac{1}{2} (\Psi + \Psi^+) = \mu_k(x,t)$$

und

$$v_k(x,t) = -\frac{1}{2} i (\Psi_k - \Psi_k^+) = \frac{1}{2} (\Psi - \Psi^+) \quad \text{und} \quad v_k^+(x,t) = \frac{1}{2} i (\Psi_k^+ - \Psi_k) = -\frac{1}{2} i (\Psi - \Psi^+) = v_k(x,t)$$

Beide Felder sind offenbar selbstadjungiert und haben daher reelle Eigenwerte. Wir schreiben wieder nur die wesentlichen Terme an und verwenden unsere symbolische Schreibweise unter Weglassung des Impulsindexes.

### 3.2 Vertauschungsrelationen der „Materiefeld-Operatoren“ $\mu$ und $v$

Nur mit  $\mu$  und  $v$  gemischte Operatoren können nicht verschwindende Kommutatoren bilden, da z.B.  $[\mu, \mu^+] = [\mu, \mu] = 0$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} [\mu, v] &= -i \frac{1}{4} [(\Psi + \Psi^+)(\Psi - \Psi^+) - (\Psi - \Psi^+)(\Psi + \Psi^+)] = \\ &= -i \frac{1}{4} \{ \Psi \cdot \Psi - \Psi \cdot \Psi^+ + \Psi^+ \cdot \Psi - \Psi^+ \cdot \Psi^+ - [\Psi \cdot \Psi + \Psi \cdot \Psi^+ - \Psi^+ \cdot \Psi - \Psi^+ \cdot \Psi^+] \} \\ &= i \frac{1}{4} \{ 2 \Psi \cdot \Psi^+ - 2 \Psi^+ \cdot \Psi \} \\ &= i \frac{1}{2} [\Psi, \Psi^+] \\ &= \frac{1}{2} i f^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Entsprechend:

$$[\mu^+, v] = [\mu, v^+] = [\mu^+, v^+] = \frac{1}{2} i f^2$$

Die Felder  $\mu$  und  $v$  sind also nicht gleichzeitig messbar.

Für Feldanteile zu unterschiedlichen Impulsen verschwinden die Kommutatoren auch für „gemischte“ Operatoren.

### 3.3 Hamilton-Operator

Wir definieren mit dem wesentlichen Anteil:

$$H = \frac{1}{f^2} \hbar \omega [\mu^+ \cdot \mu + v^+ \cdot v] + \dots$$

$$= 1/f^2 \hbar \omega [ \mu \cdot \mu + v \cdot v ]$$

und erhalten

$$\begin{aligned} &= 1/f^2 \cdot 1/4 \hbar \omega [ (\Psi + \Psi^+)^2 - (\Psi - \Psi^+)^2 ] \\ &= 1/f^2 \cdot 1/4 \hbar \omega [ 2 (\Psi \Psi^+ + \Psi^+ \Psi) ] \\ &= 1/f^2 \cdot 1/4 \hbar \omega [ 4 \Psi^+ \Psi + 2f^2 ] \\ &= 1/f^2 \cdot 1/4 \hbar \omega [ 4 \Psi^+ \Psi + 2f^2 ] \\ &= \hbar \omega [ 1/f^2 \Psi^+ \Psi + 1/2 ] \\ &= \hbar \omega [ a^+ a + 1/2 ] + \dots \end{aligned}$$

Der Anteil des so konstruierten Hamilton-Operators ist bis auf den „Vakuumsfluktuationsterm“  $1/2 \hbar \omega$  identisch mit dem beim einfachen Schrödinger-Feld (Kap. 2.3) hergeleiteten. Das könnte die Annahme bestärken, dass die „Materiefelder“ richtig definiert sind.

Matrixelemente bzgl. unserer n-Teilchen-Zustände und kohärenten Zustände sind:

$$\langle n | H | n \rangle = \hbar \omega [ n + 1/2 ] \quad \text{und} \quad \langle z | H | z \rangle = \hbar \omega [ \langle n \rangle + 1/2 ] .$$

Sie unterscheiden sich nur durch die Mittelwertbildung. Der „Vakuumsfluktuationsanteil“ müsste noch genauer untersucht werden. Da n bzw.  $\langle n \rangle$  in den untersuchten Zuständen in der Regel sehr groß ist, könnte der additive Term vernachlässigt werden. Es könnte auch im Ansatz für H ein für die Dynamik bedeutungsloser Korrekturterm  $\gamma$  hinzugefügt werden, der den Term  $1/2$  gerade kompensiert.

### 3.4 Heisenberg-Gleichung für die Feld-Operatoren der „Materiewellen“ $\mu$ und $v$

Es gilt

$$\begin{aligned} i \hbar \partial \mu / \partial t &= [\mu, H] = 1/f^2 \hbar \omega [ \mu, (\mu^+ \cdot \mu + v^+ \cdot v) ] = 1/f^2 \hbar \omega [ \mu \cdot \mu^+ \cdot \mu - \mu^+ \cdot \mu \cdot \mu + \mu \cdot v^+ \cdot v - v^+ \cdot v \cdot \mu ] \\ &= 1/f^2 \hbar \omega \{ \mu \cdot v^+ \cdot v - v^+ \cdot v \cdot \mu + v^+ \cdot \mu \cdot v - v^+ \cdot \mu \cdot v \} \\ &= 1/f^2 \hbar \omega \{ [\mu, v^+] \cdot v + v^+ \cdot [\mu, v] \} \\ &= 1/f^2 \hbar \omega \{ 1/2 i f^2 (v + v^+) \} \\ &= \hbar \omega i v \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad v = 1/\omega \partial \mu / \partial t$$

Die gleiche Beziehung folgt für den wesentlichen Anteil auch durch direkte Ableitung. Obwohl beide Felder nicht gleichzeitig messbar sind, hängen sie – zumindest in ihrem wesentlichen Anteil – eng zusammen.

$$\text{Ganz entsprechend gilt:} \quad \mu = -1/\omega \partial v / \partial t$$

$$\text{Kombiniert man beide Gleichungen, entsteht} \quad \partial^2 \mu / \partial t^2 = -\omega^2 \mu \quad \text{und auch} \quad \partial^2 v / \partial t^2 = -\omega^2 v .$$

Entsprechend gilt für die Matrixelemente bzgl. der interessierenden Zustände:

$$\partial^2 \langle n | \mu | n \rangle / \partial t^2 = -\omega^2 \langle n | \mu | n \rangle \quad , \quad \partial^2 \langle z | \mu | z \rangle / \partial t^2 = -\omega^2 \langle z | \mu | z \rangle \quad \text{und} \quad \partial^2 \langle z | v | z \rangle / \partial t^2 = -\omega^2 \langle z | v | z \rangle$$

Die Differentialgleichungen sehen nach der üblichen Schwingungsgleichung aus. Sie hängen mit der gewählten Zeitabhängigkeit des Schrödinger-Felds zusammen. Aber die DGL bzgl. von n-Teilchen-Zuständen ist trivial, da  $\langle n|\mu|n\rangle = 0$  für Teilchen-Zustände. Die DGL bzgl. kohärenter Zustände spiegelt die klassische Zeitabhängigkeit der Erwartungswerte der Materie-Feldstärke wider. Nur bzgl. kohärenter Zustände verhalten sich die Erwartungswerte der Feld-Operatoren wie bei einer klassischen Welle.

### 3.5 Teilchenzahl-Operator

Wir definieren mit dem wesentlichen Anteil:

$$N = 1/f^2 [ \mu^+ \cdot \mu + v^+ \cdot v ] + \dots$$

Wie oben ergibt sich:

$$N = 1/f^2 \Psi^+ \Psi + 1/2 = a^+ a + 1/2 + \dots$$

Erwartungswerte sind

$$\langle n|N|n\rangle = n + 1/2 \quad \text{bzw.} \quad \langle z|N|z\rangle = \langle n\rangle + 1/2 \quad , \quad \text{also ohne wesentlichen Unterschied.}$$

### 3.6 Erwartungswerte des „Materiefelds“

Bzgl. von n-Teilchen-Zuständen verschwinden die diagonalen Erwartungswerte, da das Entsprechende bereits für das Schrödinger-Feld gilt:

$$\langle n|\mu|n\rangle = 1/2 (\langle n|\Psi|n\rangle + \langle n|\Psi^+|n\rangle) = 0$$

Dagegen finden wir für kohärente Zustände:

$$\begin{aligned} \langle z|\mu|z\rangle &= 1/2 (\langle z|\Psi|z\rangle + \langle z|\Psi^+|z\rangle) = 1/2 f [ \langle z|a|z\rangle \exp(+)+ \langle z|a^+|z\rangle \exp(-) ] \\ &= 1/2 f \{ (\alpha + i\beta) [\cos(c) + i \sin(c)] + (\alpha - i\beta) [\cos(c) - i \sin(c)] \} \end{aligned}$$

dabei ist  $c = k \cdot x - \omega \cdot t$  und es wurde verwendet:

$\langle z|a|z\rangle = z$ ;  $\langle z|a^+|z\rangle = z^*$ ;  $z, z^*$  zueinander konjugiert komplexe Zahlen, z.B. mit Realteil  $\alpha$  und Imaginärteil  $\beta$ :  $z = \alpha + i\beta$  ( $|z|^2 = \langle n\rangle$ ).

Also:

$$\begin{aligned} \langle z|\mu|z\rangle &= 1/2 f \{ (\alpha + i\beta) [\cos(c) + i \sin(c)] + (\alpha - i\beta) [\cos(c) - i \sin(c)] \} \\ &= 1/2 f \{ 2\alpha \cos(c) - 2\beta \sin(c) \} \\ &= f \{ \alpha \cos(c) - \beta \sin(c) \} \\ &= f \{ \alpha \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) - \beta \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \} \end{aligned}$$

Wenn z.B.  $\beta = 0$ , gilt  $z = \alpha$ . Dann ist es naheliegend, die Amplitude  $|z| = \langle n\rangle$  als „Materiefeldstärke“ zu definieren.

Das „Materiefeld“ bzgl. kohärenter Zustände zeigt ganz offensichtlich das Verhalten von idealen klassischen Wellen mit beliebigen Anfangsbedingungen, je nach  $z = \alpha + i\beta$ . Sie breiten sich im Anschauungsraum aus. Ganz ähnlich:



$$\langle z|v|z \rangle = f \{ \beta \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) + \alpha \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \}$$

Auch hier lässt sich durch direkte Differentiation nachweisen:

$$\langle z|v|z \rangle = 1/\omega \quad \partial \langle z|\mu|z \rangle / \partial t \quad \langle z|\mu|z \rangle = -1/\omega \quad \partial \langle z|v|z \rangle / \partial t$$

$$\partial^2 \langle z|\mu|z \rangle / \partial t^2 = -\omega^2 \langle z|\mu|z \rangle \quad \text{und} \quad \partial^2 \langle z|v|z \rangle / \partial t^2 = -\omega^2 \langle z|v|z \rangle \quad (**)$$

Gleichungen, die bei einer klassischen Welle (am festen Ort) bekannt sind, gelten hier für die Erwartungswerte der „Materiefeld“-Operatoren bzgl. kohärenter Zustände. Wie beim elektromagnetischen Feld mit den zwei Anteilen **E** und **B** benötigt man auch beim „Materiefeld“ zwei Anteile, nämlich  $\langle z|\mu|z \rangle$  und  $\langle z|v|z \rangle$ . Bei der quantentheoretischen Untersuchung von Hamilton-Operator, Teilchenzahl-Operator und Interferenz müssen hier wie dort beide Anteile berücksichtigt werden.

$$\text{Es gilt aber auch: } = f \{ \alpha \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) - \beta \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \}$$

$$\partial \langle z|\mu|z \rangle / \partial x = f \cdot k \{ -\alpha \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) - \beta \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \} \quad \text{und}$$

$$\partial^2 \langle z|\mu|z \rangle / \partial x^2 = f \cdot k^2 \{ -\alpha \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) + \beta \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \} = -k^2 \cdot \langle z|\mu|z \rangle$$

In (\*\*) können wir deshalb auf der rechten Seite auch durch  $\langle z|\mu|z \rangle = 1/k^2 \partial^2 \langle z|\mu|z \rangle / \partial x^2$  bzw.  $\langle z|v|z \rangle = 1/k^2 \partial^2 \langle z|v|z \rangle / \partial x^2$  ersetzen und erhalten damit Wellengleichungen für  $\langle z|\mu|z \rangle$  und  $\langle z|v|z \rangle$ :

$$\partial^2 \langle z|\mu|z \rangle / \partial t^2 - 1/c^2 \partial^2 \langle z|\mu|z \rangle / \partial x^2 = 0 \quad \text{und}$$

$$\partial^2 \langle z|v|z \rangle / \partial t^2 - 1/c^2 \partial^2 \langle z|v|z \rangle / \partial x^2 = 0$$

also mit echten Wellengleichungen, deren Lösungen reellwertig sind und klassischen Wellen entsprechen. Sie enthält eine formale Wellengeschwindigkeit  $c = \omega/k = \hbar k/2m$ , die der Teilchengeschwindigkeit  $v$  entspricht.

### 3.7 Interferenz

Zwei gleichlaufende monochromatische „Materiewellen“ mit einem Phasenunterschied  $\varphi$  werden überlagert. Dazu setzen wir wieder an:

$$\Psi_1 = f a_k \exp(+i\varphi) \quad \Psi_2 = f a_k \exp(+i\varphi) e^{i\varphi} = \Psi_1^+ e^{i\varphi}$$

$$\Psi_1^+ = f a_k^+ \exp(-i\varphi) \quad \Psi_2^+ = f a_k^+ \exp(-i\varphi) e^{-i\varphi} = \Psi_2^+ e^{-i\varphi}$$

$$\text{Oder (symbolisch): } \Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_1 (1 + e^{i\varphi}) \quad \text{und} \quad \Psi_1^+ + \Psi_2^+ = \Psi_1^+ (1 + e^{-i\varphi})$$

Ausgedrückt durch unsere „Materiewellen“ erhalten wir:

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_1^+ + \mu_2^+ = \frac{1}{2} [ \Psi_1 + \Psi_1^+ + \Psi_2 + \Psi_2^+ ] = \frac{1}{2} [ \Psi_1 (1 + e^{i\varphi}) + \Psi_1^+ (1 + e^{-i\varphi}) ]$$

$$v_1 + v_2 = v_1^+ + v_2^+ = -\frac{1}{2} i [ \Psi_1 - \Psi_1^+ + \Psi_2 - \Psi_2^+ ] = -\frac{1}{2} i [ \Psi_1 (1 + e^{i\varphi}) - \Psi_1^+ (1 + e^{-i\varphi}) ]$$

Also entsprechend dem Teilchenzahl-Ansatz:

$$4 (\mu_1^+ + \mu_2^+) (\mu_1 + \mu_2) + 4 (v_1^+ + v_2^+) (v_1 + v_2) = 4 (\mu_1 + \mu_2)^2 + 4 (v_1 + v_2)^2 =$$

$$= \Psi_1^2 (1 + e^{i\varphi})^2 + \Psi_1 \Psi_1^+ (1 + e^{i\varphi}) (1 + e^{-i\varphi}) + \Psi_1^+ \Psi_1 (1 + e^{i\varphi}) (1 + e^{-i\varphi}) + \Psi_1^2 (1 + e^{-i\varphi})^2 -$$

$$[ \Psi_1^2 (1 + e^{i\varphi})^2 - \Psi_1 \Psi_1^+ (1 + e^{i\varphi}) (1 + e^{-i\varphi}) - \Psi_1^+ \Psi_1 (1 + e^{i\varphi}) (1 + e^{-i\varphi}) + \Psi_1^2 (1 + e^{-i\varphi})^2 ]$$

$$= 2 \Psi_1 \Psi_1^+ (1 + e^{i\varphi}) (1 + e^{-i\varphi}) + 2 \Psi_1^+ \Psi_1 (1 + e^{i\varphi}) (1 + e^{-i\varphi})$$

$$= 2 (\Psi_1 \Psi_1^+ + \Psi_1^+ \Psi_1) [2 + 2 \cos(\varphi)]$$

also:

$$\begin{aligned} 1/f^2 [(\mu_1^+ + \mu_2^+)(\mu_1 + \mu_2) + (v_1^+ + v_2^+)(v_1 + v_2)] &= 1/f^2 (\Psi_1 \Psi_1^+ + \Psi_1^+ \Psi_1)[1 + \cos(\varphi)] \\ &= (2/f^2 \Psi_1^+ \Psi_1 + 1)[1 + \cos(\varphi)] \\ &= 2(a^+ a + 1/2)[1 + \cos(\varphi)] \end{aligned}$$

wobei wieder die Vertauschungsrelation für die Schrödingerfeld-Operatoren verwendet wurde.

Berechnen wir wieder Matrixelemente bzgl. der betrachteten Zustände, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle n | (a^+ a + 1/2) | n \rangle &= 2[1 + \cos(\varphi)] = 2(n + 1/2)[1 + \cos(\varphi)] \\ \langle z | (a^+ a + 1/2) | z \rangle &= 2[1 + \cos(\varphi)] = 2(\langle n \rangle + 1/2)[1 + \cos(\varphi)] \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse (Einteilchen-Interferenz und Interferenz in kohärenten Zuständen) unterscheiden sich nicht wesentlich, nur durch eine Mittelung über die Teilchenzahl  $n$ . Bis auf den Vakuumfluktuationsterm, der möglicherweise wegdiskutiert werden kann, ergibt sich im Fall der Einteilchen-Interferenz das Ergebnis von Kap. 2.6 mit dem Schrödinger-Feld und kann wie dort diskutiert werden.

### 3.8 Folgerung

Das 2. Ergebnis lässt sich auch so interpretieren: Bis auf den Vakuumfluktuationsterm erhalten wir das gleiche Ergebnis wie bei der Interferenz klassischer Wellen, so als würden sich klassische Materiewellen gemäß  $\langle z | \mu | z \rangle$  bzw.  $\langle z | v | z \rangle$  im Anschauungsraum ausbreiten und dort analog zu elektromagnetischen Wellen überlagert werden. Ich meine, das ist eine so enge Analogie zu kohärenten Zuständen bei elektromagnetischen Wellen, Schallwellen (Phononen) und Polaritonen, die sich ja auch im Ortsraum ausbreiten, dass man einen Atomlaser im gleichen Sinn wie in den anderen Fällen eine Materiewelle nennen kann.

Weder mit den hier definierten „Materiefeld“-Operatoren bzgl.  $n$ -Teilchen-Zuständen ( $\langle n | \mu | n \rangle = 0$ ,  $\langle n | v | n \rangle = 0$  !) noch mit den Schrödinger'schen Wellenfunktionen ( $\langle n | \Psi | n \rangle = 0$ ;  $\langle z | \Psi | z \rangle$  komplexwertig !) erhält man eine ähnlich starke Analogie zu Wellen im Anschauungsraum. Die Schrödinger'schen Wellenfunktionen taugen – strenggenommen - nicht als Kandidaten für Materiewellen, da sie sich nur in abstrakten Konfigurationsräumen ausbreiten. Zur Konstruktion solcher „Materiewellen“ im Anschauungsraum braucht man kohärente Zustände, die aus  $n$ -Teilchen-Zuständen mit beliebigen Teilchenzahlen überlagert werden, wobei die Entwicklungskoeffizienten zu der von Öttl et al. nachgewiesenen Poisson-Verteilung führen.

M.E. lassen sich so Interferenzen von Atomlasern („Materiewellen“-Interferenz) beschreiben, nicht aber die von einzelnen Atomen oder Molekülen inkl. Fulleren-Molekülen (Einteilchen-Interferenz).

Die weitgehende Ähnlichkeit zwischen Einteilchen-Interferenz und „Materiewellen“-Interferenz ist wohl der Grund, weshalb sich m.W. noch niemand die Mühe der hier vorgeschlagenen Betrachtungen gemacht hat. Diese könnten dennoch vielleicht von grundsätzlicher Bedeutung sein.

### 3.9 Gedankenspiele

Sehr hypothetisch hätte man sich vorstellen können, dass es schon früh gelungen wäre, ein Messverfahren für zwei **klassische** Felder  $\mu$  und  $v$  zu finden, entsprechend der klassischen Felder **E** und **B**. Dann hätte man Interferenz-Versuche durchgeführt und hätte gefunden, dass die beiden Felder interferieren. Daraufhin hätte man, wie das historisch bei **E** und **B** der Fall war, auf einen

„Wellencharakter“ von  $\mu$  und  $\nu$  geschlossen. Man hätte klassische Wellengleichungen

$$\partial^2 \mu / \partial t^2 - 1/c^2 \partial^2 \mu / \partial x^2 = 0 \quad \text{und}$$

$$\partial^2 \nu / \partial t^2 - 1/c^2 \partial^2 \nu / \partial x^2 = 0 \quad (c = v \text{ die Teilchengeschwindigkeit})$$

gefunden und reellwertige harmonische Lösungen allgemein mit beliebigen Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  angegeben:

$$\mu = f \{ \alpha \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) - \beta \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \} \quad \text{und}$$

$$\nu = f \{ \beta \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) + \alpha \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \}$$

(Den Faktor  $f$  hätte man auch weglassen können, so als wäre er in  $\alpha$  und  $\beta$  aufgenommen.) Man hätte mit Recht von „**klassischen Materiewellen**“ gesprochen, vielleicht auch von einem „**Materielaser**“. Irgendwann, sehr viel später, hätte man gefunden, dass es sich beim Atomlaser „in Wirklichkeit“ um ein Quantenphänomen handelt, dass  $\mu$  und  $\nu$  quantisiert werden müssen. Man hätte gefunden, dass es die zugehörigen klassischen Wellen ebenso wenig in der Natur gibt wie klassische elektromagnetische Wellen. Öttl et al. hätten um 2005 eine Verteilung der Teilchenzahlen  $n$  im Atomlaser gemäß Poisson nachgewiesen. Erst nach Glauber (1963) hätte man einen Weg gefunden, einen Zusammenhang zwischen Erwartungswerten  $\langle z|\mu|z \rangle$  und  $\langle z|\nu|z \rangle$  und den klassischen Feldern  $\mu$  und  $\nu$  zu formulieren. Man hätte es als eine große Entdeckung herausgestellt, dass die Erwartungswerte  $\langle z|\mu|z \rangle$  und  $\langle z|\nu|z \rangle$  der Feldoperatoren und die klassischen Felder  $\mu$  und  $\nu$  übereinstimmen, dass aber „in Wirklichkeit“ um diese Erwartungswerte starke Streuungen stattfinden. Glauber folgend hätte man dann auch herausgefunden, dass mit zunehmender mittlerer Teilchenzahl  $\langle n \rangle$  die relativen Streuungen immer kleiner werden, dass dann also das quantisierte Materiefeld immer klassischer wird und Abweichungen immer weniger erkennbar. Man hätte sich befriedigt zurückgelehnt und festgestellt, dass die Betrachtungsweise von „klassischen Materiewellen“ doch eigentlich der Realität recht nahekommt, wenigstens, wenn man Erwartungswerte betrachtet und die Teilchenzahl  $\langle n \rangle$  groß wählt. Man hätte auch starke Korrekturen gefunden, die die Wechselwirkung der Atome in einem Atomlaser berücksichtigt.

#### 4. Literatur

E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1972

R. Loudon, The quantum theory of light, Clarendon Press, Oxford, 2000

Zeitschriften-Artikel:

R.J. Glauber, Phys. Rev. 131, 2766, 1963

Poisson-Verteilung der Atomzahlen:

A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl, T. Esslinger, Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser, Phys. Rev. Lett. 95, 1 - 4, 2005

M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect, C. I. Westbrook, Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases, Science 310, no. 5748, 648 - 651, 2005

A. Öttl, Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser, Doktorarbeit 2006