4.1 Typische Beispiele zur Berechnung der Induktionsspannung U_i

Hinweis: *$\dot{\Phi}$ (Fi punkt gelesen) bedeutet die Ableitung des magnetischen Flusses Φ nach der Zeit. Sie können es aber in vielen Fällen auch auffassen als Abkürzung für $\Delta\Phi/\Delta t$. Die Induktionsspannung ist eine Ringspannung!*

1. **Durch einen Funktionsgenerator wird ein linear von der Zeit abhängiger Strom erzeugt, der in einer Feldspule einen ebensolchen magnetischen Fluss erzeugt. Berechnen Sie die Induktionsspannung in einer Induktionsspule mit der Windungszahl n, die konzentrisch angeordnet im Inneren der Feldspule liegt. Es soll gelten: der Maximalwert der Flussdichte sei B_{max} = 0,3 T; A = 100 cm², n = 1000.**

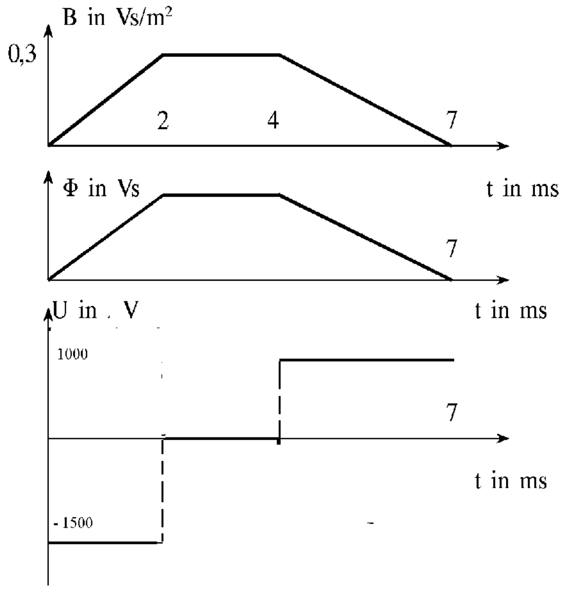

Abbildung 1 Induktion bei einem linear zeitlich veränderlichen Magnetfeld

Bei den gegebenen Größen wird gleich umgewandelt:

Geg.: $B = 0{,}30\ \mathrm{Vs/m^2}$, $A = 1{,}00\cdot10^{-2}\ \mathrm{m^2}$, $n = 1{,}0\cdot10^{3}$

Zwischen 0 ms und 2 ms wird die Induktionsspannung konstant sein, zwischen 2 ms und 4 ms 0 V, da hier keine Flussänderung stattfindet, zwischen 4 ms und 7 ms wieder konstant, aber diesmal mit umgekehrten Vorzeichen.

Hier ändert sich B im Zeitabschnitt Δt um ΔB. Die Zeitableitung des magnetischen Flusses Φ, $\dot{\Phi}$, kann diesmal durch die Steigung nach dem Steigungsdreieck ersetzt werden:

$$\dot{\Phi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B \cdot A}{\Delta t}$$

Für das 1. Zeitintervall erhalten Sie also:

$$\dot{\Phi} = \frac{0{,}30\ \mathrm{Vs/m^2}\cdot 1{,}0\cdot10^{-2}\ \mathrm{m^2}}{2{,}0\cdot10^{-3}\ \mathrm{s}} = \frac{0{,}3\cdot 10\ \mathrm{Vs}}{2{,}0\ \ \mathrm{s}} = 1{,}5\ \mathrm{V}$$

Ganz entsprechend erhalten Sie für das 3. Zeitintervall mit ΔB = - 0,3 Vs/m² und Δt = 3 ms:

$\dot{\Phi}$ = - 1,0 V

Nach Multiplikation mit der Windungszahl ergeben sich die Induktionsspannungen

U = - 1500 V bzw. U = 1000 V

Diskussion: Bemerkenswert ist, dass die Spannung in den einzelnen Abschnitten jeweils konstant ist, dass gerade da, wo der magnetische Fluss am größten ist, überhaupt keine Induktion stattfindet, dass die Induktionsspannung bei Anstieg und Abfall des magnetischen Flusses umgekehrtes Vorzeichen hat. Hier konnten Sie die Ableitung $\dot{\Phi}$ sehr einfach ohne Differenzialrechnung berechnen

2. **Durch einen Funktionsgenerator wird ein sinusförmig von der Zeit abhängiger Strom erzeugt, der in einer Feldspule einen ebensolchen magnetischen Fluss erzeugt. Berechnen Sie die Induktionsspannung in einer Induktionsspule mit der Windungszahl n, die konzentrisch angeordnet im Inneren der Feldspule liegt.**

Für die magnetische Flussdichte in Feldspule und Induktionsspule gelte:

$$B = B_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

Wenn A die Querschnittsfläche der Induktionsspule ist, die von B durchsetzt ist, dann ist der magnetische Fluss Φ durch die Induktionsspule:

$$\Phi = A\cdot B_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

Nach dem Induktionsgesetz gilt dann:

$$U_i = -\,n\cdot\dot{\Phi} = -n\cdot A\cdot B_0\,.\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega$$

Der Faktor ω kommt dabei vom Nachdifferenzieren, weil ja nicht nach dem Argument ω·t des Sinus differenziert wird, sondern nach t. Es gilt also:

$$U_i = -U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\text{wobei } U_m = n \cdot A \cdot B_0 \cdot \omega$$

Diskussion: Bei einem sinusförmig veränderlichen magnetischen Fluss ergibt sich eine (bis auf das Vorzeichen) cosinusförmig veränderliche Induktionsspannung. Der Maximalwert der Induktionsspannung U_m wächst proportional zur Windungszahl, zur Windungsfläche, zum Maximalwert der magnetischen Flussdichte und zur Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung. Bei größerer Winkelgeschwindigkeit ändert sich ja das Magnetfeld schneller.

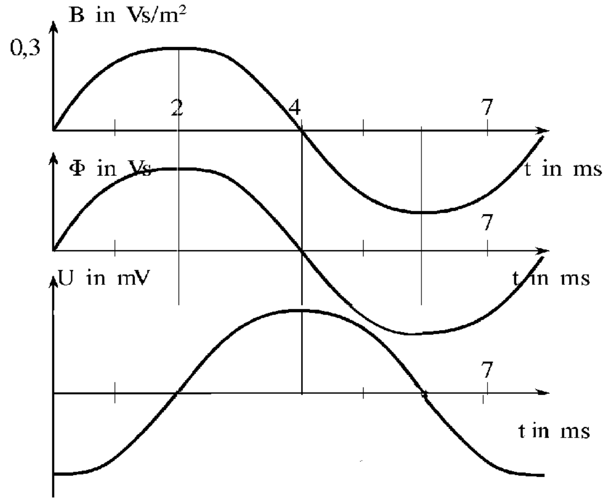

Abbildung 2 Bei sinusförmiger Zeitänderung der magnetischen Flussdichte ist die Induktionsspannung cosinusförmig.

Das Induktionsgesetz hat jetzt das **Prinzip eines Transformators** erklärt: Durch den Wechselstrom wird mittels der Primärspule (die als Feldspule wirkt) der magnetische Fluss im Eisenkern schnell verändert. In der Sekundärwicklung entsteht dann eine Induktionsspannung bzw. ein Induktionsstrom.

---

3. In einem homogenen Magnetfeld der magnetischen Flussdichte B soll sich ganz eine rechteckige Rahmenspule der Fläche A gleichmäßig drehen.

Induktion kommt hier dadurch zustande, dass sich der magnetische Fluss, der die Windungsfläche senkrecht durchsetzt, bei der Drehung zeitlich ändert. „Gleichmäßige Drehung“ bedeutet, dass der Drehwinkel ϕ prop. zur Zeit t wächst, also konstante Winkelgeschwindigkeit ω ($\phi = \omega \cdot t$) . Für den magnetischen Fluss kommt es offenbar auf die Komponente von **B** an, die die Windungsfläche senkrecht durchsetzt, also auf $B_\perp$.

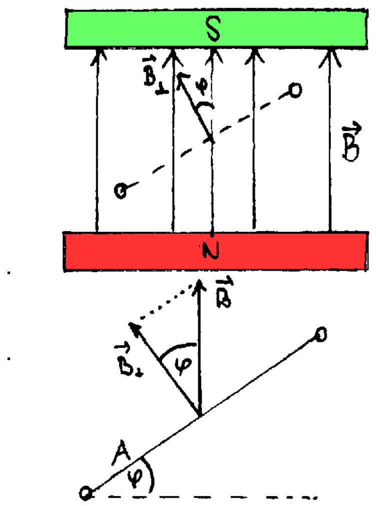

Abbildung 3 Erzeugung sinusförmiger Wechselspannung durch Drehung einer Generatorspule im homogenen Magnetfeld

Nach Abb. 3 gilt also

$B_\perp = B \cdot \cos(\phi)$
$= B \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Für den magnetischen Fluss erhalten Sie:

$$\Phi = A \cdot B \cdot \cos(\phi) = A \cdot B \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Die Induktionsspannung U_i ergibt sich aus der Zeitableitung von Φ mit

$\Phi^\bullet = -A \cdot B \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega$ (ω vom Nachdifferenzieren nach t!)

Damit folgt

$$U_i = -n \cdot \Phi^\bullet = n \cdot A \cdot B \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

oder

$$U_i = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

wobei sich der Maximalwert U_m der Induktionsspannung zu

$$U_m = n \cdot A \cdot B \cdot \omega$$ ergibt.

Diskussion: Im unveränderlichen Magnetfeld ergibt sich bei der Drehung ein cosinusförmig veränderlicher magnetischer Fluss. Infolge der gleichmäßigen Drehung der Induktionsspule entsteht eine sinusförmig veränderliche Induktionsspannung. Der Maximalwert der Induktionsspannung U_m wächst proportional zur Windungszahl n, zur Windungsfläche A, zum Maximalwert der magnetischen Flussdichte B und zur Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung. Bei größerer Winkelgeschwindigkeit ändert sich ja das Magnetfeld, das die Windungsfläche senkrecht durchsetzt, schneller.

---

4. **In einem quadratischen Bereich der Kantenlänge l = 9 cm herrsche ein homogenes Magnetfeld der magnetischen Flussdichte B = 0,3 mT. Eine Induktionsspule mit quadratischer Windungsfläche der Kantenlänge a = 3 cm (senkrecht zu B) ruhe zunächst nach Zeichnung im Zentrum des magnetischen Feldes. Die Induktionsspule habe 10000 Windungen.**

a) Zur Zeit t = 0 s beginnt das magnetische Feld gleichmäßig zu wachsen. Es erreicht seinen Maximalwert B = 0,3 mT zur Zeit 3 s und ist dann konstant. Zeichnen Sie qualitativ bis zur Zeit 4 s, wie die Induktionsspannung von der Zeit abhängt.

b) Berechnen Sie die Induktionspannung für die Zeit bis 4 s!

c) Von der Zeit t = 4 s an bewegt sich nun die Induktionsschleife mit der konstanten Geschwindigkeit v = 1,5 cm/s nach rechts, wobei das Magnetfeld konstant bleiben soll. Wann beginnt die Spule aus dem magnetischen Feld auszutreten? Wann ist der Austritt beendet? Ergänzen Sie den Graphen der Induktionsspannung von Aufg. a) und begründen Sie, weshalb eine Induktionsspannung entsteht. Berechnen Sie die Induktionsspannung!

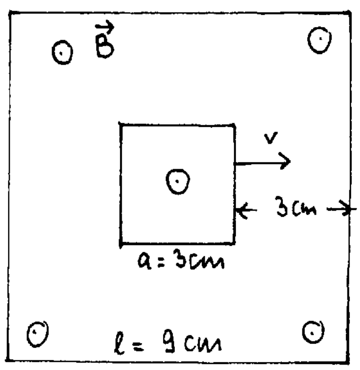

Abbildung 4 Quadratischer Magnetfeldbereich mit Kantenlänge l; Situation, bei der die Induktionsspule mit Kantenlänge a ganz im homogenen Magnetfeld enthalten ist.

Lösung:

a) Bei konstanter vom Magnetfeld senkrecht durchsetzter Windungsfläche ändert sich B um ΔB = 0,3 mT gleichmäßig in der Zeit Δt = 3 s. Die Änderungsgeschwindigkeit der magnetischen Flussdichte ist also in diesem Fall von Null verschieden; damit muss eine Induktionsspannung entstehen:

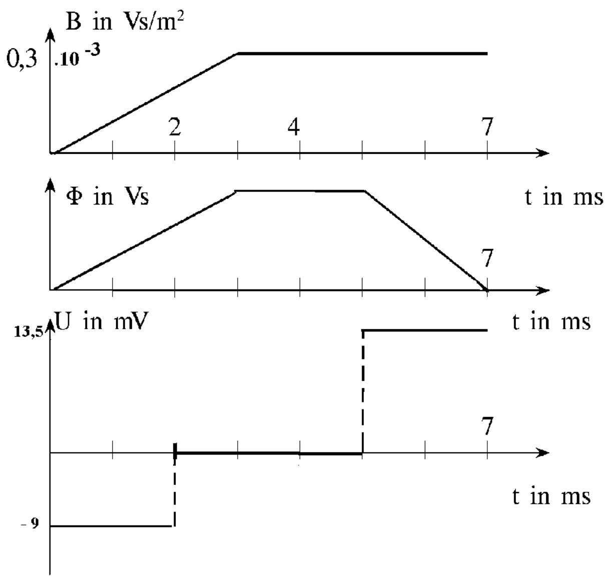

Abbildung 5 Induktionsspannung, wenn sich der magnetische Fluss bei konstantem Magnetfeld dadurch ändert, dass sich ein Ring in das Magnetfeld hinein bewegt.

$$U_i = -\,n \cdot A \cdot B^{\bullet} = \frac{10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Vs/m}^2}{3\ \text{s}} = -\,0{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{V} = -\,0{,}9\ \text{mV}$$

Von 3 s bis 4 s entsteht keine Induktionsspannung, weil der magnetische Fluss konstant ist.

Die Induktionsspannung ist konstant, solange sich das magnetische Feld gleichmäßig ändert, solange also Änderungsgeschwindigkeit des Magnetfelds, $B^{\bullet}$, konstant ist. Es ergibt sich der erste Teil des $U_i(t)$-Graphen Abb. 5.

c) Die Induktionsspule beginnt nach weiteren 2 s, also zur Zeit 5 s, das Feld zu verlassen und ist nach weiteren 2 s ganz im feldfreien Raum angelangt.

Bei konstanter magnetischer Flussdichte B = 0,3 mT ändert sich jetzt die vom Magnetfeld senkrecht durchsetzte Windungsfläche mit der Änderungsgeschwindigkeit ΔA/Δt erst von 5 s bis 7 s, also in einem Zeitintervall von 2 s:

$$A^{\bullet} = \Delta A/\Delta t = \frac{-\,9 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{2\ \text{s}} = -\,4{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$$

und es ergibt sich die Induktionsspannung

$$U_i = -\,n \cdot B \cdot A^{\bullet} = -\,10^4 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Vs/m}^2\ (-\,4{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s})$$

$$= 1{,}35\ \text{mV}$$

Zwischen Beginn und Ende des Austritts aus dem Feld ist $\dot{A}$ konstant, damit auch die Induktionsspannung. Diese hat jetzt aber umgekehrtes Vorzeichen wie bei Aufg. a), weil jetzt der magnetische Fluss in der Induktionsspule abnimmt. Es ergibt sich der zweite Teil des $U_i(t)$-Graphen in Abb. 5.

---

5. **In die einzige Windung einer Induktionspule sind zwei Widerstände mit den Daten R_1 = 100 Ohm, R_2 = 200 Ohm eingebaut. Sonst ist die Windung widerstandslos. Die beiden Widerstände sind an den Punkten A und B miteinander verbunden. Die Windung der Fläche wird von einem magnetischen Fluss Φ durchsetzt, der sich in 2 ms von 0 mVs auf 6 mVs ändert. Außerhalb der Induktionsspule soll kein magnetischer Fluss sein.**

a) Berechnen Sie die Ringspannung.

b) Berechnen Sie den Ringstrom durch beide Widerstände.

c)Welche Spannungen (!) sind zwischen A und B zu messen?

Zu a): Die Ringspannung bzw. Induktionsspannung ergibt sich aus der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses, also

$$|U_i| = \dot{\Phi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{6\text{ m Vs}}{2\text{ ms}} = 3\text{ V}$$

Zu b): Der Gesamtwiderstand der Induktionsspule beträgt 300 Ohm. Daraus ergibt sich eine Stromstärke von 0,01 A.

Zu c): Sie ruft an R_1 einen Spannungsabfall von 1 V hervor, an R_2 von 2 V.

Je nachdem, wie man die Zuführungsleitungen zum Voltmeter zwischen A und B verlegt (je nachdem, welcher magnetische Fluss eingeschlossen wird), misst man 0 V, 1 V, 2 V. Wenn man den magnetischen Fluss mehrfach umrundet, kann man jeweils auch noch ganzzahlige Vielfache von 3 V dazu addieren.